

目 录

第十三章 天体位置的变化及归算	1
§ 13.1 大气折射	2
§ 13.2 视差	9
§ 13.3 光行差	20
§ 13.4 岁差和章动	30
§ 13.5 恒星位置的归算	45
第十四章 恒星位置的测定和基本坐标系的建立	71
§ 14.1 子午测定恒星赤道坐标的原理和仪器	71
§ 14.2 子午天体测量仪器的误差及其影响	77
§ 14.3 测定恒星赤道坐标的目视方法	82
§ 14.4 照相天体测量学的原理和方法	85
§ 14.5 恒星自行的测定	90
§ 14.6 恒星三角视差的测定	94
§ 14.7 基本坐标系的建立	95
§ 14.8 各类星表系统简介	97
§ 14.9 天文常数系统概述	100
§ 14.10 测定恒星位置的新技术	104
第十五章 地球自转参数和天文点的测定原理	109
§ 15.1 太尔各特法测定纬度	109
§ 15.2 纬度变化和地极移动	113
§ 15.3 中星仪测时	116
§ 15.4 精确时间的发播	119
§ 15.5 世界时、历书时和协调世界时	121
§ 15.6 测定地球自转参数的新技术	125
§ 15.7 测定天文点的原理和仪器	132

§ 15.8	天文点的测定方法	136
§ 15.9	天文定位在航海中的应用	140
§ 15.10	多星等高法同时测定经度和纬度	143
第十六章	二体问题	147
§ 16.1	开普勒定律和万有引力定律	147
§ 16.2	二体问题的运动方程和积分	153
§ 16.3	二体问题的轨道分类	160
§ 16.4	开普勒方程的解法	165
§ 16.5	日心黄道直角坐标和速度的计算	169
§ 16.6	星历表计算	177
§ 16.7	初轨计算原理和方法	181
§ 16.8	引力作用范围, 宇宙速度	185
§ 16.9	二体问题在宇宙航行动力学中的应用	190
第十七章	N 体问题	196
§ 17.1	N 体系统的力函数	196
§ 17.2	地球对外面一质点的吸引	202
§ 17.3	N 体问题的积分	207
§ 17.4	用直角坐标表示的摄动运动方程	212
§ 17.5	三体问题的摄动运动方程	216
§ 17.6	限制性三体问题	223
§ 17.7	称动解	229
§ 17.8	零速度面	233
§ 17.9	限制性三体问题的应用	238
第十八章	摄动问题	240
§ 18.1	摄动理论简介	240
§ 18.2	拉格朗日行星运动方程	243
§ 18.3	摄动力三分量表示的摄动运动方程	251
§ 18.4	瞬时椭圆, 几种常见的摄动	258
§ 18.5	解摄动运动方程的基本方法	262
§ 18.6	摄动运动方程的分析解法原理	264
§ 18.7	摄动函数展开方法轮廓	274

§ 18.8 摄动运动方程的解	280
§ 18.9 人造地球卫星的摄动运动	285
§ 18.10 月球火箭与行星际飞行器的摄动运动	289
§ 18.11 地球自转的运动方程	293
§ 18.12 地极移动和岁差章动	297
主要参考书目	308
人名索引	309
名词索引	322

第十三章 天体位置的变化及归算

迄今为止测定恒星位置都是在地面进行的。观测结果受到观测误差以及恒星和观测者本身位置变化等各种因素的影响。观测误差和观测仪器、观测方法、观测环境以及结果处理等有关，在以后有关章节中将加以具体论述，本章仅讨论后一类中的各种因素。

为了克服恒星和观测者位置变化对测定恒星位置的影响，首先必须分析造成这类变化的原因，研究恒星和观测者运动的规律及其影响观测结果的机理，确定这些效应的数量；其次，则须确立某一固定瞬间（在天文学上称为历元）和原点的天球坐标系，并解决如何把不同瞬间和不同地点的观测结果都归算到这个历元及原点，从而得到确定的恒星位置。这类影响归纳起来包括大气折射、视差、光行差、岁差、章动以及恒星自行。

地球周围有一层浓密的大气。由于大气对光线的折射，在光学观测中，目标的方向发生变化。这种变化称为大气折射。在观测结果中，首先要改正它的影响。

视差曾在 § 4.6, § 7.1 和 § 8.1 中介绍过。它是观测者在空间位移造成的天体方向的变化。为了对不同的观测进行比较，必须把一切观测结果都换算到同一观测地点。通常根据不同的要求把这“同一观测地点”选择为地球中心，通过归算得到天体的地心坐标，或选择为太阳中心，则得日心坐标。

光行差是因为观测者随地球自转和绕日公转以及光速为有限值而引起的天体方向的变化。

岁差和章动，已在§4.5描述过它们的现象，实质上是地球在日月引力作用下的一类运动。由于岁差和章动，地球自转轴在空间的指向改变，因而由自转轴所定义的天极及与之相应的天赤道在天球上都随时间变化。此外，由于行星的引力作用，产生行星岁差，使黄道也发生变化。天赤道和黄道的变化，又导致春分点移动。其结果，恒星和一切天体的赤道坐标由于坐标系本身的转动而随时间改变。为要得到恒星坐标的确定值，就要把它们换算到同一个特定的坐标系，即换算为对于某一历元的春分点和天赤道的坐标。这就必须改正岁差和章动的影响。

除此以外，在§11.2还介绍过恒星的运动，表现在天球上即恒星自行。显然，恒星自行必然导致恒星坐标的变化。在作恒星坐标的换算时，必须考虑恒星自行的影响。

§13.1 大气折射

光线经过不同的透明介质发生折射的物理现象是大家所熟知的。从天体到观测者的光线，必须经过地球表面的大气层。越靠近地面大气的密度越大，从而导致折射系数连续改变；星光在经过大气层的过程中连续折射，因而星光传播路径发生弯曲。这就是大气折射现象。由于大气折射，观测者所看到的天体方向 and 没有大气时不同，这个方向差通常也称大气折射或称蒙气差。约在公元前二世纪，古希腊的波西东尼乌斯(Posidonius)发现了大气折射对天文测量的影响。后来，托勒密在他的著作《光学》中进一步论述了大气折射问题。在我国，晋代天文学家姜岌已发现了这一现象。十六世纪，第谷测定了大气折射值。大气折射的近代理论是直到十七世纪才创立的。此外，大气中各种气体和尘埃质点的散射和吸收能引起星光光谱成分的衰减和变化，也会稍微改

变星光的方向。

一、大气折射对天顶距的影响

图 13.1 中, 设观测者在 M 点观测天体 σ 。在大气层外, 天体的光线沿着直线方向 σK 行进。光线在 K 点进入大气层, 产生折射, 连续地改变方向, 其路线成为一条曲线。观测者将在此曲线的最后部分看到天体, 也就是沿着光路曲线在 M 点的切线方向即 $M\sigma'$ 看到天体。

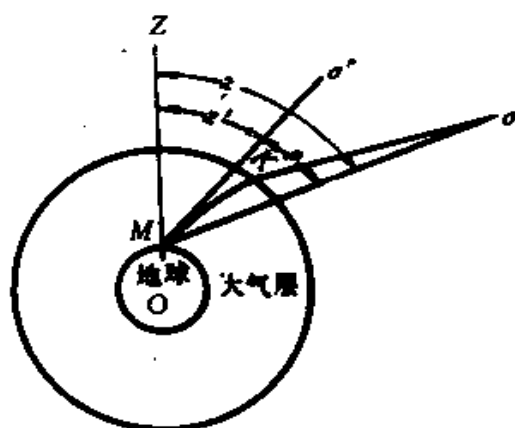


图 13.1 大气折射对天顶距的影响

如果没有大气折射的影响, 观测者将在 $M\sigma$ 方向看到天体。

$M\sigma'$ 方向与 $M\sigma$ 方向之差为 $\angle \sigma'M\sigma = \rho$, ρ 就是大气折射。设 MZ 为天顶的方向, $\angle ZM\sigma = z$, 叫做真天顶距。在大气折射影响下, 所见天体的天顶距 $z' = \angle ZM\sigma'$, 叫做视天顶距。根据折射定律, 入射线与折射线以及在入射点对折射面所作的法线均在同一平面内。所以 σK , σM 和 $\sigma' M$ 都位于通过 $MZ\sigma$ 的一个垂直平面内, 因此

$$z = z' + \rho. \quad (13.1)$$

由此可见, 大气折射使得天体的天顶距减小, 或者说使得天体的高度增加。由地面测得的天体的视天顶距必须加上大气折射改正, 才是天体的真天顶距。

大气折射现象发生在同一垂直平面内, 所以对天体的方位角没有影响。尽管大气折射对天体的赤经(或时角)、赤纬等量的测量值也有影响, 但通常折射改正总是首先直接加到视天顶距上, 而不是从其他测量值中改正。

二、大气折射的消除

1. 大气折射的近似公式 要消除大气折射对观测的影响, 必须计算大气折射 ρ 的值, 通过(13.1)式改正视天顶距。由于对大气的物理状态及其随多种因素变化的知识至今了解得仍不够充分, 精确地计算大气折射是十分困难的。这里仅就一种最简单的大气结构模型进行讨论。假定大气是由无数密度不同的等密度层组成的, 并考虑到大气层的厚度远较地球半径为小, 则可近似地认为观测地点附近的大气等密度层都是平行平面层。

暂且把大气分成 n 个等密度层, 并假定各层的折射率从地面 (第1层) 到最外层 (第 n 层) 分别为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 即假定折射率在整个大气层中的变化是不连续的 (图 13.2)。大气层外的折射率 $\mu_{n+1}=1$ 。若观测一天顶距为 z 的天体, 光线在大气层中的路线为一折线。对于最外层来说, 光线的入射角就是天体的

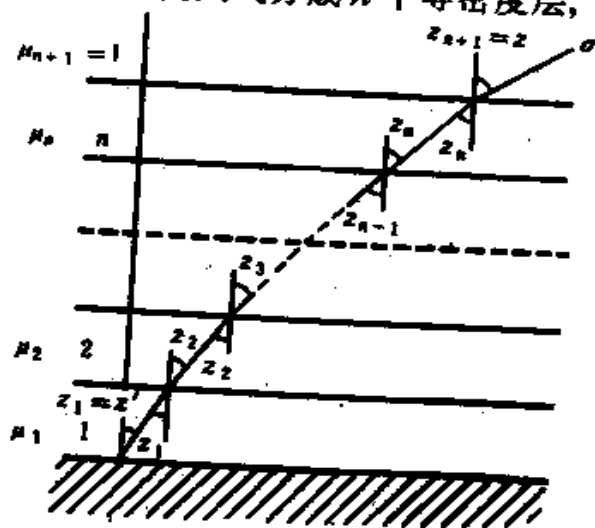


图 13.2 平面等密度大气层

真天顶距 z , 折射角为 z_n , 而 z_n 也是第 $(n-1)$ 层的入射角, 依次类推。最后, 光线在第一层的入射角就是观测天顶距 $z' = z_1$ 。

从大气层外起, 对相邻的两层运用折射定律, 有

$$\sin z = \mu_n \sin z_n,$$

$$\mu_n \sin z_n = \mu_{n-1} \sin z_{n-1},$$

$$\mu_{n-1} \sin z_{n-1} = \mu_{n-2} \sin z_{n-2},$$

.....

$$\mu_2 \sin z_2 = \mu_1 \sin z';$$

因此有

$$\sin z = \mu_1 \sin z'. \quad (13.2)$$

从以上推导过程可见，只要把大气看作由平行平面等密度层构成，当 n 趋向无限，即大气层中折射率连续变化时，也能得到 (13.2) 式。这时光线循一弯曲路线传播。

将 (13.1) 式代入 (13.2) 式，得

$$\sin(z' + \rho) = \mu_1 \sin z',$$

即
$$\sin z' \cos \rho + \cos z' \sin \rho = \mu_1 \sin z'.$$

由理论研究得知， ρ 的最大值为 $35'$ ，故可看作微量，则有 $\cos \rho \approx 1$ ， $\sin \rho \approx \rho'' \sin 1''$ ，代入上式得

$$\sin z' + \cos z' \rho'' \sin 1'' = \mu_1 \sin z',$$

因此
$$\rho'' = 206265''(\mu_1 - 1) \operatorname{tg} z'.$$

在标准状况（大气温度为 0°C ，气压为 101324.72 帕）下，地面大气的折射率 $\mu_1 = 1.000292$ ，代入上式得

$$\rho'' = 60.2'' \operatorname{tg} z'. \quad (13.3)$$

这就是计算大气折射 ρ 的近似公式。式中的系数 $60.2''$ 称为大气折射常数。对于小于 30° 的天顶距，用 (13.3) 式求得的大气折射误差约为 $0.1''$ ；对于小于 60° 的天顶距，此式尚可适用。当天顶距再增大时，这个近似公式和实际情况相差很大，无法应用。

2. 各种大气折射理论 为了更精确地计算大气折射，必须考虑到地球的曲率，将大气分为许多同心球层。一般说来，大气的折射率随高度的增加而减小，但要确定两者之间的精确关系，却极为困难，只能采用一些与实际情况尽可能相符的假设。无论采用哪种假设，大气折射都可展开成下列形式

$$\rho = a \operatorname{tg} z' + b \operatorname{tg}^3 z' + c \operatorname{tg}^5 z' + \dots, \quad (13.4)$$

式中各系数 $a, b, c, \dots$ 等的表达式因不同的假设而不同。

历史上曾提出过各种大气性质随高度变化的不同假设，形成各种不同的大气折射理论。不少著名学者如牛顿、布拉德雷(Bradley)、拉普拉斯(Laplace)和贝塞耳(Bessel)等都对大气折射进行过研究。其中具有代表性的是吉尔当(H. Gylden)在1868年提出的理论，著名的普尔科沃大气折射表就是根据他的理论编制的。这个表在1870年初版，后来几经修订再版，至今应用最广泛的仍是普尔科沃天文台所编的大气折射表。

二十世纪以来，根据在大气中的新发现又编制了很多大气折射表。各种大气折射值，在天顶距不大时彼此符合得很好。有的大气折射值仅当天顶距大于 80° 时，彼此之间才显示出较大的差异。在这个领域中，最新的进展是用电子计算机代替折射表，并根据大气折射在天顶距上的适用范围，扩充公式的有效性。但接近地平时的大气折射的精确计算，至今仍是一个没有解决的问题。

3. 反常折射 大气折射的理论值是根据理想的大气情况导出的。实际的大气情况非常复杂，比如，大气的等密度层既非同心球层，更不是水平的。大气状况随气温、气压、水汽压等因素而千变万化，很难准确地掌握。此外，大气结构还受地区性局部气象因素的影响，甚至观测室内外或观测室内各部分之间的温差，也会引起大气层的形态改变。所以用理想的大气模型算得的大气折射就与实际情况有差异。这种差异称为反常折射。反常折射严重的可达十分之一角秒的量级，从而极大地限制了地面光学天体测量测角仪器精度的提高。当前，尚未有很好的办法消除反常折射，只有通过选择良好的天文台环境，改善观测室结构等措施尽量减轻其影响。

三、大气折射表

在实际工作中，求大气折射改正不采用公式计算，因为公式

中含有随大气折射率变化的因子，直接计算这些因子是很不方便的。大气折射率和大气密度有关，而大气密度又随大气的温度和气压而变化。在实际应用中，首先计算出标准状况下不同视天顶距 z' 的大气折射，并编制成表，称为平均大气折射表。这种表以视天顶距 z' 为引数，可查出标准状况下的大气折射 ρ_0 。

查出平均大气折射 ρ_0 后，再利用大气折射订正表来计算实际气温、气压下的大气折射 ρ 。在订正表中载有分别以气温和气压为引数的相应的改正系数。计算公式为

$$\rho = \rho_0(1 + A + B), \quad (13.5)$$

式中 A 和 B 就是气温和气压的改正系数，分别由下列公式求得

$$A = \frac{-0.00383t}{1 + 0.00367t}, \quad B = \frac{H}{101324.72} - 1, \quad (13.6)$$

式中 t 为以摄氏温度计的大气温度， H 是以帕计量的气压。实际上现在大部分气压计都以毫米水银柱为单位计量，则(13.6)式的第二式应为

$$B = \frac{H}{760} - 1. \quad (13.7)$$

此外，还须注意 H 是加纬度和气温差改正的实气压，而不是由气压计直接读取的数值。设气压计读数为 H' ，测站纬度为 φ ，气压计内水银温度为 t' ，则有

$$H = H'[1 - 0.00264 \cos 2\varphi - 0.000163(t' - t)], \quad (13.8)$$

对于天顶距较大($z > 45^\circ$)的天体，大气折射变化剧烈，气温改正系数 A 应以 αA 代替，这时计算公式为

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha A + B). \quad (13.9)$$

在《中国天文年历》中，附表 13 刊载着“蒙气差表”和“蒙气差订正表”。前一表以视天顶距 z' (即表上“天顶距 z ”)为引数，查取平均大气折射 ρ_0 (即表上“蒙气差 R_0 ”)；后一表分别以气温 T 、

实气压 H 和视天顶距 z 为引数查取 A , B 和 α 。

例一、设在南京大学天文台($\varphi=32^{\circ}3'$)由观测得某星的高度为 $63^{\circ}5'27''$, 这时读得仪器温度 18.3°C , 气压计读数为 754.8 毫米汞柱, 气压计温度 19.9°C , 求此星的大气折射。

求解步骤如下:

(1) 求天顶距。 $z=90^{\circ}-63^{\circ}5'27''=26^{\circ}54'33''$;

利用《中国天文年历》附表 9“化分秒为度的小数”化得 $z=26.91^{\circ}$;

(2) 查蒙气差表。在 $z=26.5^{\circ}$ 和 $z=27.0^{\circ}$ 这两个引数间, 以 $n=(0.91-0.5)/0.5=0.82$ 为内插因子进行线性内插, 得 $R_0=30.50''$;

(3) 求实气压。 $\cos 2\varphi=\cos 64^{\circ}6'=0.6403$;

$$H=754.8 \times (1-0.00264 \times 0.6403-0.000163 \times 1.6) \\ =754.8 \times 0.9980=753.3 (\text{毫米汞柱});$$

(4) 查蒙气差订正表。分别以仪温和实气压为引数, 作简单内插后得 $A=-0.0657$, $B=-0.0088$;

(5) 求大气折射。利用 (13.5) 式得

$$\rho=30.50'' \times (1-0.0657-0.0088) \\ =30.50'' \times 0.9255=28.23''.$$

例二、设在某测站由观测得某星的视天顶距为 $70^{\circ}14'53''$, 这时读得气温为 22.5°C , 并已求得实气压为 762.9 毫米汞柱, 求此星的大气折射。

求解步骤如下:

(1) 将天顶距化为度的小数。 $z=70^{\circ}14'53''=70.25^{\circ}$;

(2) 查蒙气差表。以天顶距 z 为引数作简单内插后得 $R_0=166.00''$;

(3) 查蒙气差订正表。分别以气温、实气压和天顶距为引数,

查得 $A = -0.0796$, $B = +0.0038$, $\alpha = 1.009$;

(4) 求大气折射。利用(13.9)式得

$$\begin{aligned}\rho &= 166.00'' \times (1 - 1.009 \times 0.0796 + 0.0038) \\ &= 166.00'' \times 0.9235 = 153.30'' = 2'33.30''.\end{aligned}$$

虽然对大气折射已作了相当详尽的研究, 并编制出了便于实际应用的表, 但是对于接近地平的天体所计算出的大气折射, 和实际数值差异很大。因此在实际观测中, 应避免测量天顶距大于 75° 的天体。

除了对光学观测产生影响外, 在人造卫星或月球激光测距工作中, 大气折射使观测到的光行时间与真空中的理论光行时间不同。测距结果必须扣除因大气折射引起的对光程的影响。大气折射也影响甚长基线干涉测量和人造卫星多普勒观测的结果。

§ 13.2 视 差

一、视差现象和视差位移

1. 视差的起因 观测者在两个不同位置观测同一天体引起的观测目标方向之差叫做视差。图 13.3(a)中, 设位于 O' 点的观测者观测天体 σ , 方向为 $O'S'$; 位于 O 点的观测者观测同一天体 σ 的方向为 OS 。令 O' 到 O 的连线方向指向 A , 可见 OS 对于 $O'S'$ 的方向差为

$$\angle AOS - \angle AO'S' = \angle O\sigma O' = p.$$

p 就是 σ 对于 O 和 O' 两点的视差。

2. 视差的大小 在 $\triangle OO'\sigma$ 中, 令 $OO' = d$, $O\sigma = \Delta$, $O'\sigma = \Delta'$, 则有

$$\sin p = \frac{d}{\Delta'} \sin AOS = \frac{d}{\Delta} \sin AO'S'. \quad (13.10)$$

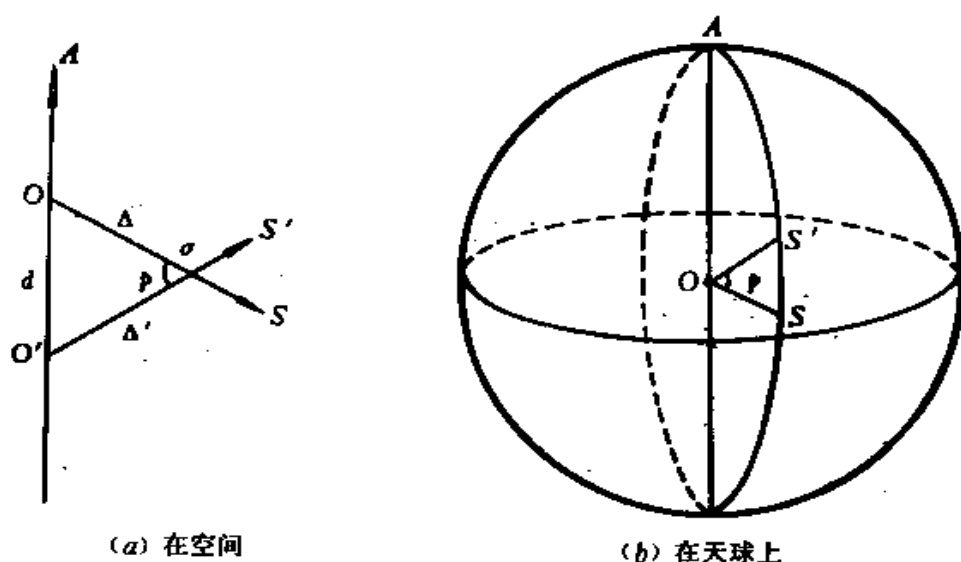


图 13.3 视差和视差位移

由此可见，一个天体对于两个观测点的视差，等于该天体对这两点间的直线所张的角。视差 p 的大小随两点间的距离 d 增大而增大，随天体到这两点的距离 Δ (或 Δ') 的增大而减小。若 d 和 Δ 均为常数，则当 $\angle AO'S'$ 为直角时， p 为最大。

3. 向点和视差位移 现在把 $O'S'$ 方向、 OS 方向和 $O'O$ 方向投影在以 O 为球心的天球上； $O'O$ 在天球上的投影为 A (图 13.3(b))。' O' 点对于 O 点的视差，可以看成原先观测者在 O' 点观测，后来位移到 O 点观测同一天体所产生的。这种位移方向在天球上的投影叫做向点，即图 13.3(b) 中的 A 点。相应地，观测方向的改变，即视差 p ，反映在天球上就是天体的视位移 $S'S$ 。天体的这种视位移叫做视差位移。显而易见，向点 A 和视差位移 $S'S$ 是在同一大圆上，且视差位移发生在这大圆上从 S' 起背离向点的方向。据图 13.3(b)，以大圆弧表示相应的角度，则由 (13.10) 式得

$$\sin SS' = \sin p = \frac{d}{\Delta} \sin AS = \frac{d}{\Delta} \sin AS'. \quad (13.11)$$

4. 视差归算的目的 地面上的观测者随地球的自转和公转而不断地改变着自己的空间位置。同一观测者在不同瞬间观测同一天体，由于前后空间位置不同，他所见该天体的方向是不一样的。另一方面，不同地点的两个观测者，在同一瞬间观测同一天体，所见天体的方向也不一样。视差归算的目的，就在于把观测者在不同位置上所测得的天体坐标归算到某个统一的标准观测点（简称标准点）上，或者反过来，把对应于标准点的天体坐标归算到对应于不同位置的观测者；也就是要计算视差对于天体坐标的影响。

就不同类型的天体来说，要采用不同的标准点。对太阳、月球、行星等太阳系天体，取地球中心为标准点。以观测者为天球中心的天体坐标称为站心坐标，以地心为天球中心的天体坐标称为地心坐标。同一天体的站心方向和地心方向之差称为该天体的地心视差或周日视差。对于恒星，则取太阳中心为标准点。以日心为天球中心的天体坐标称为日心坐标。同一天体的地心方向与日心方向之差称为该天体的日心视差或周年视差。欲求同一天体不同球心的天球坐标之差，就必须计算相应的视差对这些坐标的影响。

二、周日视差

周日视差是与地球自转或天体的周日视运动有关的视差。图 13.4 中， O 表示地心， M 表示观测地点。按视差的一般定义，周日视差就是通过 M 点的地球半径 a 在天体 σ 处的张角。设天体对于 M 点的天顶距为 z' ，显然，周日视差随天体的天顶距的变化而改变。当天体位于天顶时，它的周日视差为零；当天体位于地平时，它的周日视差达到极大值 p_0 ，称为周日地平视差。由于地球是个扁球体，不同纬度处的半径值不同；故同一天体的周日

地平视差值，还将随观测地点的纬度不同而改变。当观测者位于

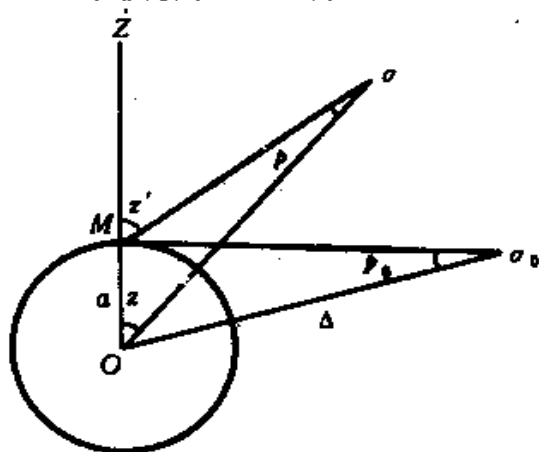


图 13.4 周日视差

赤道时，天体的周日地平视差具有最大值，称为赤道地平视差。每一确定天体的赤道地平视差是一常数值，通常就简称为地平视差，用 P_0 表示。

恒星到地球的距离十分遥远，周日视差都小到可以忽略不计。只有在观测太阳系内的天体时，才需要考虑周日视差的影响。

一般太阳系天体的地心距都远大于地球半径，所以周日视差为小量。太阳系天体中以距地球最近的月球的视差最大，约 1° 左右，而太阳和行星的周日视差都在 $30''$ 以下。

1. 地球为圆球时的周日视差 在计算太阳和行星的周日视差时，可以近似地把地球看作以赤道半径 a 为半径的球体。图 13.5 画出一个地心天球，周日视差的向点是天底 Z_1 ，在地面所见某天体的方向为 OS' ，在地心所见则为 OS 。视差位移 $S'S$ 发生在过 S' 和 Z_1 的大圆上， S 背离 Z_1 。令 z' 为天体的天顶距， Δ 为天体的地心距离，则据 (13.11) 式有

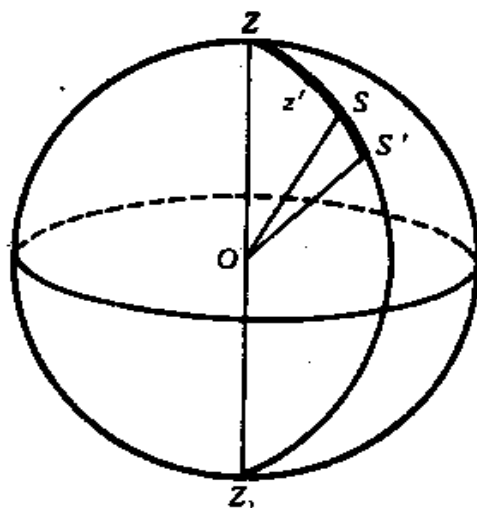


图 13.5' 地球为球体时的周日视差

$$\sin p = \frac{a}{\Delta} \sin z'. \quad (13.12)$$

当 $z' = 90^\circ$ ， p 达到其最大值 P_0 ，即

$$\sin P_0 = \frac{a}{\Delta}. \quad (13.13)$$

因此有 $\sin p = \sin P_0 \sin z$.

因为 p 和 P_0 均为小量, 略去它们的高次项, 则有

$$p = P_0 \sin z'. \quad (13.14)$$

由于 a 为常数, P_0 只与天体的地心距离 Δ 有关, 所以在天文工作中常用 P_0 来表示太阳系天体(包括月球)的地心距离 Δ 。在《中国天文年历》的太阳、月亮和行星的历表中, 逐日列出了有关天体的地平视差值。根据太阳和行星的天顶距 z' 和年历中所列出的 P_0 值, 由(13.14)式可计算视差 p 。

例三、试求 1986 年 4 月 24 日北京时间 20^h 月心的地心距离。

若已知月亮的地平视差 P_s , 可按下式近似地计算月心的地心距离 Δ (参见《中国天文年历》的“说明”中“月亮表”部分)

$$\Delta_s = \frac{1.3156 \times 10^9}{P_s''} \text{ 千米}.$$

《中国天文年历》的“月亮(黄经黄纬)表”给出以每日力学时 0^h 和 12^h 的月球地平视差值。北京时间 20^h 就是世界时 12^h。在 1986 年 4 月, 世界时时刻与力学时时刻仅差 55.2^s (参见《中国天文年历》的“说明”中“时间系统”部分)。这一差值可以忽略, 即可取“月亮表”中 4 月 24.5 日的值, 有

$$P_s = 60'47.3'' = 3647.3''.$$

于是得 $\Delta_s = \frac{1.3156 \times 10^9}{3647.3} \text{ 千米} = 3.6071 \times 10^5 \text{ 千米}.$

2. 地球为椭球时的周日视差 为了更准确地计算周日视差(特别是月亮的周日视差), 应把地球作为椭球体来处理。图 13.6(a)中, O 为地球中心, 由于地球不是球体, 所以地面上的铅垂线方向并不通过 O 。以 MN 表示 M 点的铅垂线方向, 通过 O 点作 MN 的平行线 OB ; P 表示地球北极, 图形所在的平面就

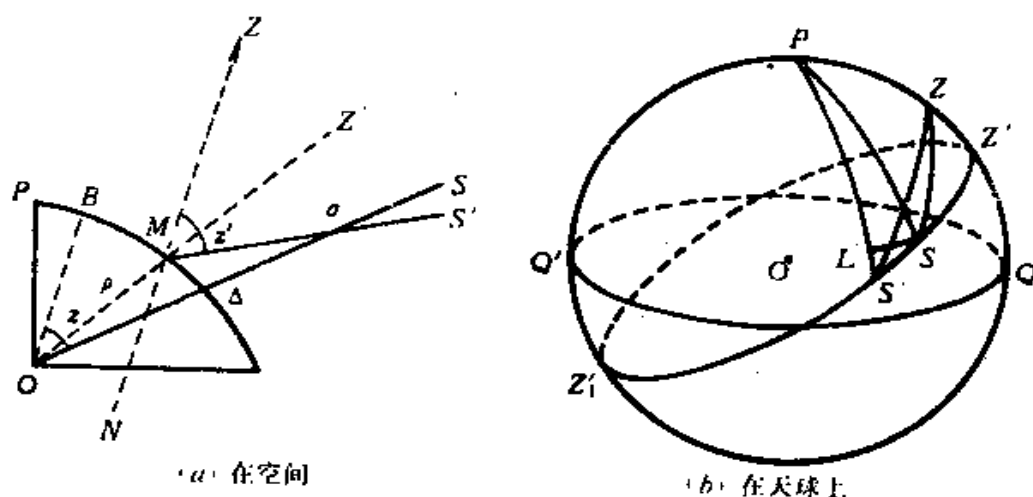


图 13.6 地球为椭球时的周日视差

是 M 点的子午面。假如观测不在子午面上的某一天体 σ , 得地面天顶距 z' , 并令地心天顶距为 z 。将图 13.6(a) 投影到天球上, 得图 13.6(b) 图中 P 为天极, Z' 为地心天顶, Z_1 为相应的天底即向点, Z 为天文天顶, S' 和 S 分别为观测者在地面和地心所看到的天体位置, 大圆弧 $S'S$ 就是视差位移。根据视差位移的原理有

$$\sin p = \frac{\rho}{\Delta} \sin Z'S',$$

式中 ρ 为 M 点的向径, Δ 为天体的地心距离。以 (13.13) 式代入上式得

$$\sin p = \frac{\rho}{a} \frac{a}{\Delta} \sin Z'S' = \frac{\rho}{a} \sin P_0 \sin Z'S'. \quad (13.15)$$

在图 13.6(b) 的球面三角形 $ZZ'S'$ 中, 已知 $ZZ' = \phi - \phi'$, $ZS' = z'$, $\angle Z'ZS' = A$, 其中 ϕ 是天文纬度, ϕ' 是地心纬度, ZZ' 可由 (4.11) 式算得, z' 和 A 分别为在 M 点所测得的天体 S' 的天顶距和方位角, 由此可利用球面三角公式解得 $Z'S'$ 。此外, $\frac{\rho}{a}$ 根据对地球形状和大小的研究由下列公式计算

$$\frac{\rho}{a} = 1 - 0.003324 \sin^2 \varphi, \quad (13.16)$$

将 $Z'S'$, $\frac{\rho}{a}$ 和 P_0 代入 (13.15) 式, 就可以计算出 p 值.

3. 周日视差对天体赤道坐标的影响 在实际工作中, 很少需要根据 (13.15) 式来计算天体的周日视差, 而是需要计算周日视差对天体的赤道坐标的影响. 由图 13.6(b) 的球面三角形 $PS'S$ 和 $PS'Z'$ 可见, $PS' = 90^\circ - \delta'$, $PS = 90^\circ - \delta$, $\angle ZPS' = t'$, $\angle ZPS = t$. 在窄球面三角形 $PS'S$ 中, 通过 S 点作大圆弧 SL 垂直于 $S'P$, 近似地认为 $PS = PL$, 则对于球面三角形 $S'SL$ 和 $S'SP$ 分别应用正弦公式, 可得

$$\begin{cases} \sin S'L = \sin SS' \cos PSZ', \\ \sin S'PS \sin PS = \sin SS' \sin PS'Z'. \end{cases}$$

上式中 $S'L = \delta - \delta'$, $\angle S'PS = t' - t$, 及 SS' 均为微量, $\angle PS'Z' \approx \angle PSZ'$, 则得

$$\begin{cases} \delta' - \delta = -SS' \cos PSZ', \\ (t' - t) \cos \delta = SS' \sin PSZ'. \end{cases} \quad (13.17)$$

又因 $SS' = p$, 由 (13.15) 式有

$$SS' = \frac{\rho}{a} P_0 \sin Z'S' = \frac{\rho}{a} P_0 \sin Z'S. \quad (13.18)$$

将 (13.18) 式代入 (13.17) 式, 且利用关系 $t' - t = \alpha - \alpha'$, 则有

$$\begin{cases} \delta' - \delta = -\frac{\rho}{a} P_0 \sin Z'S \cos PSZ', \\ (\alpha' - \alpha) \cos \delta = -\frac{\rho}{a} P_0 \sin Z'S \sin PSZ'. \end{cases} \quad (13.19)$$

对球面三角形 PSZ' 应用正弦公式和五元素公式, 并将 $\varphi' = 90^\circ - PZ'$, $\delta = 90^\circ - PS$ 代入得

$$\begin{cases} \sin Z'S \sin PSZ' = \sin PZ' \sin Z'PS = \cos \varphi' \sin t, \\ \sin Z'S \cos PSZ' = \cos PZ' \sin PS - \sin PZ' \cos PS \cos Z'PS \\ = \sin \varphi' \cos \delta - \cos \varphi' \sin \delta \cos t. \end{cases}$$

由此, (13.19) 式变为

$$\begin{cases} \delta' - \delta = -\frac{\rho}{a} P_0 (\sin \varphi' \cos \delta - \cos \varphi' \sin \delta \cos t), \\ \alpha' - \alpha = -\frac{\rho}{a} P_0 \cos \varphi' \sin t \sec \delta. \end{cases} \quad (13.20)$$

(13.20) 式就是周日视差影响天体的赤纬和赤经的公式。这些公式精确到视差的一次项。对于月球, 由于它离地球很近, 视差值比较大, 要用更精确的公式, 读者可以参阅《球面天文学》(苗永宽编著, 科学出版社, 1983 年版)。

三、周年视差

周年视差是与地球绕太阳周年运动有关的视差。由开普勒行

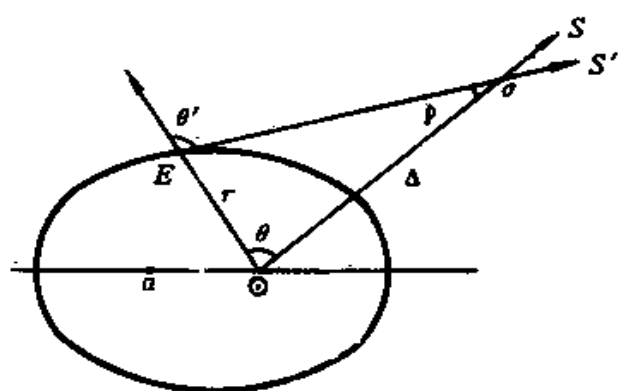


图 13.7 周年视差

星运动定律知地球绕太阳轨道为一椭圆, 太阳位于椭圆的一个焦点上。图 13.7 中, $\odot$ 为太阳, E 为地球, σ 为一恒星。 $E\odot = r$ 为地球至太阳的距离(即地球矢径)。据视差的一般定义, 周年视差

就是地球矢径在天体处的张角。由 (13.11) 式有

$$\sin p = \frac{r}{\Delta} \sin \theta' = \frac{r}{\Delta} \sin \sigma E \odot, \quad (13.21)$$

式中 Δ 为天体至太阳的距离, θ' 角为太阳至地球方向和地球至天体方向的夹角。显然, 周年视差 p 的值随 θ' 角的变化而变化, 即

跟天体和地球、太阳的相对位置有关。举一特例来看，位于黄道平面上的恒星，在地球公转过程中，当它与太阳、地球在同一直线上时，周年视差为零；而当地球运行到使 $\theta' = 90^\circ$ 的位置时，周年视差最大。

1. 恒星的周年视差 为了表示恒星至太阳的距离，定义

$$\sin \pi = \frac{a}{\Delta}, \quad (13.22)$$

式中 a 为地球轨道半长径。 π 等于地球轨道半长径在一颗位于黄极方向的恒星处所张的角，特称 π 为恒星的周年视差(图 13.8)，简称为恒星视差。这就是 § 8.1 所介绍的恒星三角视差。要注意恒星视差 π 与前面所定义的周年视差 p 在概念上的区别。由 (13.21) 式知，当 $r = a$, $\angle \sigma E \odot = 90^\circ$ 时， $p = \pi$ 。由此可见 π 只是 p 的特例。地球轨道半长径可视为不变，恒星视差只与恒星至太阳的距离有关，所以通常用 π 表示恒星距离。

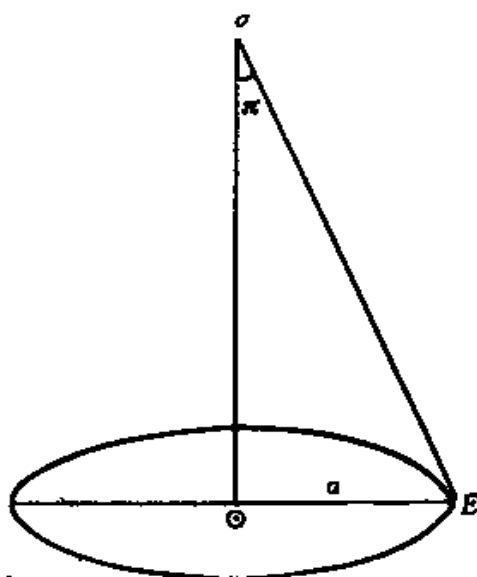


图 13.8 恒星的周年视差

恒星的周年视差都小于 $1''$ ，多数只有百分之几角秒。目前测定恒星视差只能准确到 $0.01''$ ，而绝大多数恒星的周年视差小于此值，可以忽略不计。视差最大的一颗恒星是南门二 (α Cen) 的一颗伴星，它的视差等于 $0.76''$ ，故有比邻星之称。通常 π 以角秒为单位，(13.22) 式写为

$$\pi = 206265'' \frac{a}{r}. \quad (13.23)$$

2. 周年视差对恒星赤道坐标的影响

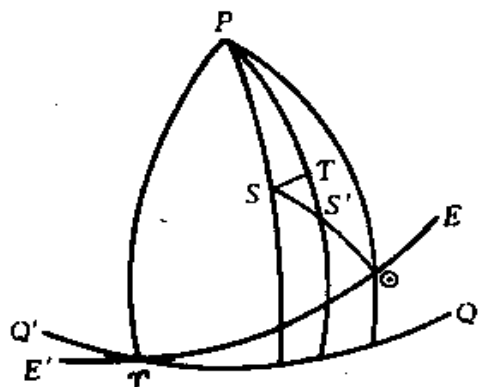


图 13.9 周年视差对恒星赤道坐标的影响

天文年历或星表中列出的是恒星的日心赤道坐标，而观测只能得到恒星的地心赤道坐标。对于视差较大的恒星，应计算视差对赤道坐标的影响。把图 13.7 投影在一个地心天球上，得图 13.9。图中， P 为天极， QQ' 为赤道， EE' 为黄道， S 和 S' 分别为观测者在日心和地心所看到的恒星位置；符号 $\odot$ 表示太阳，

就是周年视差的向点， $\alpha_{\odot}$ 和 $\delta_{\odot}$ 表示太阳的赤道坐标； α 、 δ 和 α' 、 δ' 分别表示恒星的日心坐标和地心坐标。根据视差位移原理，可知 S 、 S' 和 $\odot$ 应在同一大圆上，大圆弧 $S'S$ 就是恒星的周年视差位移，由 (13.11) 式有

$$SS' = \frac{r}{\Delta} \sin S\odot. \quad (13.24)$$

据 (13.22) 式得

$$SS' = \pi \frac{r}{a} \sin S\odot. \quad (13.25)$$

在窄球面三角形 PSS' 中， $PS = 90^\circ - \delta$ ， $PS' = 90^\circ - \delta'$ ， $\angle SPS' = \alpha' - \alpha$ ，与 (13.17) 式的推导类似，易得

$$\begin{cases} \delta' - \delta = SS' \cos PSS', \\ (\alpha' - \alpha) \cos \delta = SS' \sin PSS'. \end{cases} \quad (13.26)$$

利用 (13.25) 式，则有

$$\begin{cases} \delta' - \delta = \pi \frac{r}{a} \sin S\odot \cos PSS', \\ \alpha' - \alpha = \pi \frac{r}{a} \sec \delta \sin S\odot \sin PSS'. \end{cases} \quad (13.27)$$

对球面三角形 $PS\odot$ 应用正弦公式和五元素公式, 并考虑到 $\angle SP\odot = \alpha_{\odot} - \alpha$, 有

$$\begin{cases} \sin S\odot \sin PSS' = \sin(\alpha_{\odot} - \alpha) \cos \delta_{\odot}, \\ \sin S\odot \cos PSS' = \sin \delta_{\odot} \cos \delta - \cos \delta_{\odot} \sin \delta \cos(\alpha_{\odot} - \alpha). \end{cases}$$

将此关系式代入(13.27)式, 得

$$\begin{cases} \delta' - \delta = \pi \frac{r}{a} [\cos \delta \sin \delta_{\odot} - \sin \delta \cos \delta_{\odot} \cos(\alpha_{\odot} - \alpha)], \\ \alpha' - \alpha = \pi \frac{r}{a} \cos \delta_{\odot} \sin(\alpha_{\odot} - \alpha) \sec \delta. \end{cases} \quad (13.28)$$

上式就是将天体的地心坐标和日心坐标进行换算的公式, 式中的 r , $\alpha_{\odot}$ 和 $\delta_{\odot}$ 可以从天文年历的太阳表中查得。

(13.28) 式还能化为更便于应用的形式。将此式右端 $\cos(\alpha_{\odot} - \alpha)$ 和 $\sin(\alpha_{\odot} - \alpha)$ 分别展开, 考虑地球相对于太阳中心为原点的赤道直角坐标。

$$\begin{cases} x_c = -r \cos \delta_{\odot} \cos \alpha_{\odot}, \\ y_c = -r \cos \delta_{\odot} \sin \alpha_{\odot}, \\ z_c = -r \sin \delta_{\odot}, \end{cases} \quad (13.29)$$

并在上式中对 r 取以天文单位为单位, 于是可将(13.28)式化为

$$\begin{cases} \delta' - \delta = \pi(-z_c \cos \delta + x_c \sin \delta \cos \alpha + y_c \sin \delta \sin \alpha), \\ \alpha' - \alpha = \pi(x_c \sin \alpha - y_c \cos \alpha) \sec \delta. \end{cases} \quad (13.30)$$

设太阳中心的黄纬为零, ϵ 为黄赤交角, 则容易求得 $z_c = y_c \tan \epsilon$, 代入(13.30)式, 并引入辅助量

$$\begin{cases} c = \frac{1}{15} \cos \alpha \sec \delta, & c' = \tan \epsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta, \\ d = \frac{1}{15} \sin \alpha \sec \delta, & d' = \cos \alpha \sin \delta. \end{cases} \quad (13.31)$$

则(13.30)式化为

$$\begin{cases} (\delta' - \delta)'' = \pi(x_c d' - y_c c'), \\ (\alpha' - \alpha)^s = \pi(x_c d - y_c c), \end{cases} \quad (13.32)$$

式中 c, d, c', d' 称为恒星常数, 对同一恒星来说, 它们基本上是常量, 某些专用历表中列有所载恒星的恒星常数。 x_c 和 y_c 可以在《中国天文年历》的“太阳直角坐标表”中查到。角标“ $''$ ”和“ s ”分别表示以角秒和时秒为单位。

至于太阳系天体, 它们与太阳和地球的距离变化很大, 变化的规律也各不相同, 它们的地心坐标与日心坐标往往相差很大, 其视差归算问题应根据不同天体的运动规律专门研究, 不在这里讨论。

除了周日视差和周年视差以外, 还有一类恒星视差是由于太阳相对于恒星的空间运动(太阳本动)所产生的, 这称为长期视差也称视差动。定义长期视差为恒星对于太阳在一年里走过的距离的张角。设这一距离为 d , 恒星至太阳的距离为 Δ , 则长期视差 π_s 为

$$\sin \pi_s = \frac{d}{\Delta}. \quad (13.33)$$

太阳以 19.7 千米/秒的速度向武仙座方向运动, $d \approx 6.2 \times 10^8$ 千米, 恒星的距离远得无可比拟, 因此长期视差是一小量, 可表示为

$$\pi_s'' = 206265 \frac{d}{\Delta}. \quad (13.34)$$

太阳附近恒星的长期视差等于其周年视差的 4.15 倍。长期视差与恒星本身的空间运动合在一起, 形成恒星的自行, 通常不作单独改正。

§ 13.3 光 行 差

一、光行差现象

1. 光行差的起因 运动中的观测者所观测到的天体的方向

与在同一瞬间、同一地点静止的观测者所观测到的同一天体的方向是不同的，这两个方向之差叫做光行差。这种现象可以从日常生活中所遇到的类似现象加以说明。

在没有风的下雨天，雨滴垂直地落向地面。这是一个静止的人所见的情形。如果这个人坐在快速前进的火车里，会看到雨滴倾斜地由前往后向他落来；火车行进得越快，雨点倾斜就越厉害。这是因为雨滴除了有垂直下落的速度以外，相对于运动着的观测者，还有水平方向往后的相对速度。两种速度合成的结果，使雨滴的下落方向发生倾斜。光行差就是与此类似的现象。

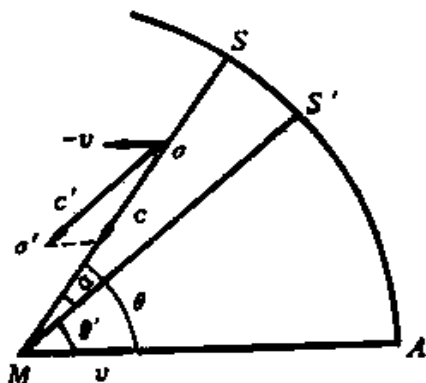


图 13.10 光行差的起因

设观测者在 M 点观测天体 σ (图 13.10)，若观测者静止不动，则所见天体位于天球上 S 点， MS 是天体的真方向或几何方向， S 称为天体的真位置。如果观测者以速度 v 沿 MA 方向运动，这时，一方面天体发出的光线沿 σM 方向以光速 c 射向观测者；另一方面根据相对运动原理，可以认为天体相对于观测者沿着与观测者运动方向相反的方向以速度 v 运动。这两种运动的合成使得观测者实际看到的天体方向是 MS' ($MS' \parallel \sigma\sigma'$) 而不是 MS 。两者的方向差 $\angle SMS' = \alpha$ ，就是光行差。 MS' 称为天体的视方向， S' 为天体的视位置。

由此可知，产生光行差的原因有二：(1) 观测者以一定的速度在运动；(2) 光速是有限值。地球上的观测者，同时以自转和公转速度在空间运动，因此所观测到的天体位置是视位置。

2. 光行差的大小 对图 13.10 中包含光速矢量 c 和与观测者速度反向的矢量 $-v$ 的三角形应用正弦定律，得

$$\sin a = \frac{v}{c} \sin \theta', \quad (13.35)$$

式中 θ' 是 MS' 和 v 的夹角。由于观测者的速度比光速要远小得多，所以 a 是小量，于是有

$$a'' = 206265 \frac{v}{c} \sin \theta', \quad (13.36)$$

又可将关系 $\theta' = \theta - a$ 代入 (13.35) 式

$$\sin a = \frac{v}{c} \sin(\theta - a) = \frac{v}{c} \sin \theta \cos a - \frac{v}{c} \cos \theta \sin a.$$

取 $\sin a = a$, $\cos a = 1$, 略去二级小量后有

$$a = \frac{v}{c} \sin \theta. \quad (13.37)$$

3. 向点和光行差位移 图 13.10 中，设观测者 M 运动的方向（即速度矢量 v 的指向）在天球上的投影为 A ，这一点称为向点。因光行差现象引起的天体方向的偏移，即光行差位移 SS' ，发生在 SMA 平面上，也就是天球的大圆弧 SA 上（因为 M 为天球球心），且自 S 点起偏向向点。

4. 光行差的发现 光行差现象是 1728 年由英国天文学家布拉德雷在测量天龙 γ (γ Dra, 中名天棓四) 的赤纬时发现的。当时他测量的目的在于要发现周年视差，结果观测到恒星以一年为周期的位移，其偏移方向与视差位移的方向不同。他发现黄极附近的所有恒星，在一年里都描绘出半径为 $20.5''$ 的圆周，而和恒星的距离无关。并且在任何时刻，恒星偏移方向并不指向太阳，而是指向黄道上太阳西面 90° 的一点。不在黄极附近的恒星，则描绘出一个椭圆，其长轴平行于黄道。在黄道上椭圆退化为直线，所有椭圆的半长轴都等于 $20.5''$ ，也和恒星的距离无关。布拉德雷所发现的这种现象，就是由于观测者随地球围绕太阳运动而引起的光行差现象。

地球上的观测者在空间有三种运动：(1)地球的自转；(2)地球的公转；(3)太阳系在星际空间的运动(包括太阳本动和银河系自转两种运动)。由第一种运动引起的叫周日光行差；第二种引起的叫周年光行差；第三种引起的叫长期光行差。

二、周年光行差

地球绕太阳公转造成的光行差称为周年光行差。图 13.11 中，太阳 $\odot$ 为天球中心， Π 为黄极， LL' 为黄道， E 为某一瞬间地球在公转轨道上的位置，其运动方向即该点的切线方向 EA 。这个方向在天球上的投影为 A 点， A 点就是周年光行差的向点。显而易见，向点位于黄道上，其黄道坐标为

$$\lambda_A = \lambda_{\odot} - 90^\circ,$$

$$\beta_A = 0, \quad (13.38)$$

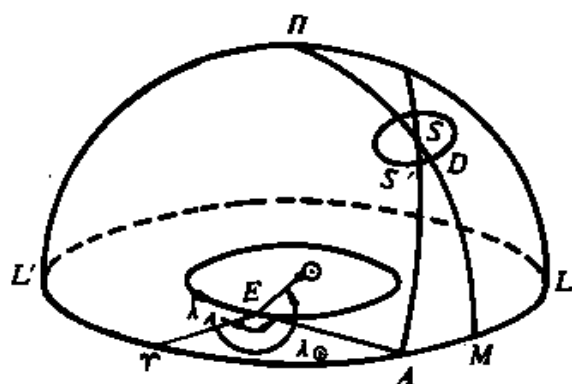


图 13.11 周年光行差

式中 $\lambda_{\odot}$ 为太阳黄径。由此得出结论：周年光行差的向点位于黄道上太阳以西 90° 。

1. 光行差常数和光行差椭圆 地球公转的平均轨道速度为 29.8 千米/秒，由此可得

$$k = \frac{v}{c} = 20.47'',$$

k 称为光行差常数。这个数值是 1896 年纽康综合了当时的各种测定值以后得出的。尽管很早就发现了纽康的这个数值偏小，精度较低，但由于牵涉到其他常数，此值一直使用了近 70 年，并未予以改动。1968 年起，根据国际天文学联合会 1964 年大会通过的天文常数系统， k 值改为 $20.4958''$ 。这个值是根据天文单位和光速的新采

用值 1 天文单位 $= 1.49600 \times 10^8$ 千米和 $c = 2.997925 \times 10^5$ 千米/秒推导出来的。光行差常数是一个导出常数。1976 年国际天文学联合会天文常数系统确定相对于标准历元 2000.0 的 k 值为 $20.49552''$ ，这个值已于 1984 年开始为全世界统一采用。

地球在公转中，向点方向呈周年变化，因此周年光行差位移具有相应的周期性。这也使所有天体在天球上的视位置描绘出相应周期的椭圆轨迹，这些椭圆称为光行差椭圆。如图 13.11 所示，由于观测者随地球作公转运动，在某一瞬间观测者见恒星 S 沿大圆弧位移至 S' 。现在考察在周年光行差影响下， S' 点的轨迹。因为弧 SS' 为一微量，可将小三角形 DSS' 视为平面直角三角形，并令 $S'D = x$ ， $SD = y$ ，由此并顾及球面三角形 SAM 可求得

$$\begin{aligned} x &= SS' \sin DSS' \\ &= k \sin SA \sin DSS' \\ &= k \sin AM, \\ y &= SS' \cos DSS' \\ &= k \sin SA \cos DSS' \\ &= k \sin \beta \cos AM. \end{aligned}$$

由上列两式得

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 \sin^2 \beta} = 1 \quad (13.39)$$

这是一个椭圆方程，是恒星因周年光行差引起的视方向在天球上描绘的轨迹，也就是光行差椭圆。由 (13.39) 式可见，当恒星位于黄极时 ($\beta = 90^\circ$)，其轨迹为一圆；而位于黄道上时 ($\beta = 0^\circ$)，则退化为直线。布拉德雷的观测结果与此完全一致。

2. 周年光行差对恒星赤道坐标的影响 整个讨论过程和计算恒星周年视差的影响类似。将恒星和周年光行差向点都投影到

一个日心天球上，如图 13.12 所示。图中， P 为北天极， QQ' 和 EE' 分别为赤道和黄道； S 为恒星，其赤经、赤纬为 α ， δ ； A 为向点。根据光行差位移的原理，可以求出受周年光行差影响后恒星 S' 的位置；令其赤经、赤纬为 α' ， δ' 。则有 $\angle SPS' = -(\alpha' - \alpha)$ ， $PS = 90^\circ - \delta$ ， $PS' = 90^\circ - \delta'$ 。解窄球面三角形 PSS' 得

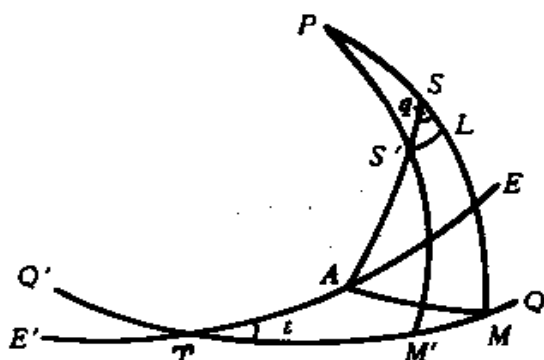


图 13.12 周年光行差对恒星赤道坐标的影响

$$\begin{cases} (\alpha' - \alpha) \cos \delta = -SS' \sin PSS', \\ \delta' - \delta = SS' \cos PSS'. \end{cases} \quad (13.40)$$

由(13.37)式得

$$SS' = k \sin SA. \quad (13.41)$$

(13.41)式代入(13.40)式得

$$\begin{cases} (\alpha' - \alpha) \cos \delta = -k \sin SA \sin PSS', \\ \delta' - \delta = k \sin SA \cos PSS'. \end{cases} \quad (13.41)$$

对球面三角形 SAM 应用正弦公式和五元素公式可得

$$\begin{cases} \sin SA \sin ASM = \sin AM \sin SMA, \\ \sin SA \cos ASM = \cos AM \sin SM \\ \quad - \sin AM \cos SM \cos SMA, \end{cases}$$

再由球面三角形 ΥAM ，并利用(13.38)式得

$$\begin{cases} \cos AM = \cos \alpha \sin \lambda_\odot - \sin \alpha \cos \lambda_\odot \cos \epsilon, \\ \sin AM \sin \Upsilon MA = -\cos \lambda_\odot \sin \epsilon, \\ \sin AM \cos \Upsilon MA = \sin \alpha \sin \lambda_\odot + \cos \alpha \cos \lambda_\odot \cos \epsilon, \end{cases}$$

式中 ϵ 为黄赤交角。但从图 13.12 可见

$$\angle SMA + \angle \Upsilon MA = 90^\circ,$$

则有

$$\begin{cases} \sin SA \sin ASM = \sin \alpha \sin \lambda_{\odot} + \cos \alpha \cos \lambda_{\odot} \cos \epsilon, \\ \sin SA \cos ASM = (\cos \alpha \sin \lambda_{\odot} - \sin \alpha \cos \lambda_{\odot} \cos \epsilon) \sin \delta \\ \quad + \cos \lambda_{\odot} \sin \epsilon \cos \delta, \end{cases}$$

将此式代入(13.41)式, 注意到 $\angle PSS' = 180^\circ - \angle ASM$, 最后得

$$\begin{cases} (\alpha' - \alpha) \cos \delta = -k \sin \alpha \sin \lambda_{\odot} - k \cos \alpha \cos \lambda_{\odot} \cos \epsilon, \\ \delta' - \delta = -k \cos \alpha \sin \lambda_{\odot} \sin \delta + k \sin \alpha \cos \lambda_{\odot} \cos \epsilon \sin \delta \\ \quad - k \cos \lambda_{\odot} \sin \epsilon \cos \delta. \end{cases} \quad (13.42)$$

上式还可改写为

$$\begin{cases} \alpha' - \alpha = -k \cos \lambda_{\odot} \cos \epsilon \cos \alpha \sec \delta - k \sin \lambda_{\odot} \sin \alpha \sec \delta, \\ \delta' - \delta = -k \cos \lambda_{\odot} \cos \epsilon (\operatorname{tg} \epsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta) \\ \quad - k \sin \lambda_{\odot} \cos \alpha \sin \delta. \end{cases} \quad (13.43)$$

与计算周年视差的影响时一样, 引入辅助量 c, d, c', d' , 即

$$\begin{cases} c = \frac{1}{15} \cos \alpha \sec \delta, & c' = \operatorname{tg} \epsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta, \\ d = \frac{1}{15} \sin \alpha \sec \delta, & d' = \cos \alpha \sin \delta; \end{cases} \quad (13.44)$$

并引入符号

$$\begin{cases} C = -k \cos \lambda_{\odot} \cos \epsilon, \\ D = -k \sin \lambda_{\odot}, \end{cases} \quad (13.45)$$

代入(13.43)式可得

$$\begin{cases} (\alpha' - \alpha)^s = Cc + Dd, \\ (\delta' - \delta)^s = Cc' + Dd'. \end{cases} \quad (13.46)$$

由(13.45)式可知, C 和 D 与太阳的位置有关, 而与恒星的位置无关; 反之, c, d, c', d' 则仅与恒星的位置有关。

也可以用另一套符号简化(13.43)式, 令

$$\begin{cases} C = h \sin H, \\ D = h \cos H; \\ i = C \operatorname{tg} \varepsilon, \end{cases} \quad (13.47)$$

代入(13.43)式, 经适当整理后得

$$\begin{aligned} (\alpha' - \alpha)^s &= \frac{1}{15} h \sin(H + \alpha) \sec \delta, \\ (\delta' - \delta)'' &= h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta. \end{aligned} \quad (13.48)$$

C , D 叫做贝塞耳日数, h , H , i 叫做独立日数, 它们分别以日期为引数列于天文年历中。

事实上, 按(13.43)式或与其等价的(13.46)或(13.48)式改正光行差后, 得到的坐标并不是完全改正了光行差后的真位置, 因为计算时把地球公转轨道看作了圆周。如果考虑地球实际轨道是一个椭圆, 在计算光行差时计及轨道椭率, 那就必须在(13.43)等式中加上含有椭率的项。这些项通常称为周年光行差改正的 E 项。由于地球轨道椭率很小, E 项的影响通常小于 $0.03''$, 而且对于某一恒星来说, E 项变化很小。关于周年光行差的详细计算, 读者可参阅《球面天文学》有关章节。

三、周日光行差

地球自转造成的光行差称为周日光行差。地球赤道上的一点, 其周日运动的线速度 v_0 等于地球赤道的圆周长除以一恒星日内的平时秒数, 即

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T}.$$

地球赤道半径近似取为 $R=6378$ 千米, $T=86164$ 秒, 因此 $v_0=0.464$ 千米/秒。 v_0 除以光速 c , 得周日光行差常数为

$$k' = \frac{v_0}{c} = 0.319''.$$

对于在纬度为 φ 处的观测者来说, 其周日运动的角速度和赤道上的点是相同的, 但线速度 v 与 v_0 不等, 而与其纬度圈的半径 r 成正比, 由于 $r = R \cos \varphi$, 所以

$$v = v_0 \cos \varphi. \quad (13.49)$$

地球自西向东自转, 观测者的运动方向总是指向东点。据光

行差位移原理可知, 在周日光行差的影响下, 天体沿着通过天体和东点的大圆向东点位移 $\sigma\sigma'$ (图 13.13) 且有

$$\begin{aligned} \sigma\sigma' &= \frac{v}{c} \sin \sigma E \\ &= k' \cos \varphi \sin \sigma E. \end{aligned} \quad (13.50)$$

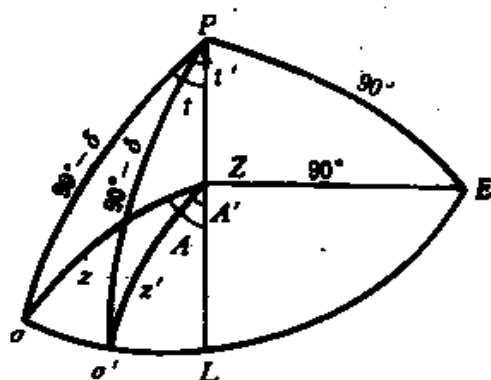


图 13.13 周日光行差对
恒星坐标的影响

容易证明周日光行差位移的轨迹

也是一个椭圆, 它的半长径等于 $k' \cos \varphi$ 。

图 13.13 中, P 为北天极, Z 为天顶, E 为东点。 σE 是通过天体和东点的大圆, 它与子午圈 PZL 交于 L 点。 $P\sigma$, $Z\sigma$ 是天体真位置 σ 的赤经圈和地平经圈; $P\sigma'$, $Z\sigma'$ 是天体视位置 σ' 的赤经圈和地平经圈。下面据此来讨论周日光行差对恒星坐标的影响。

1. 周日光行差对恒星地平坐标的影响 在上图的窄球面三角形 $Z\sigma\sigma'$ 中, $Z\sigma = z$, $Z\sigma' = z'$, $\angle\sigma Z\sigma' = A - A'$, 则有

$$\begin{cases} z - z' = \sigma\sigma' \cos Z\sigma E, \\ (A - A') \sin z = \sigma\sigma' \sin Z\sigma E. \end{cases} \quad (13.51)$$

将 (13.50) 式代入上式得

$$\begin{cases} z - z' = k' \cos \varphi \sin \sigma E \cos Z\sigma E, \\ (A - A') \sin z = k' \cos \varphi \sin \sigma E \sin Z\sigma E. \end{cases} \quad (13.52)$$

在球面三角形 $Z\sigma E$ 中, $ZE = 90^\circ$, 则有

$$\begin{aligned} \sin \sigma E \cos Z\sigma E &= -\cos z \cos(90^\circ + A) = \cos z \sin A, \\ \sin \sigma E \sin Z\sigma E &= \sin(90^\circ + A) = \cos A. \end{aligned}$$

将上列关系代入(13.52)式得

$$\begin{cases} z' - z = -k' \cos \varphi \cos z \sin A, \\ A' - A = -k' \cos \varphi \cos A \csc z. \end{cases} \quad (13.53)$$

这就是周日光行差对恒星地平坐标影响的公式。

2. 周日光行差对恒星赤道坐标的影响 在窄球面三角形 $P\sigma\sigma'$ 中 $P\sigma = 90^\circ - \delta$, $P\sigma' = 90^\circ - \delta'$, $\angle \sigma P\sigma' = t - t'$, 则有

$$\begin{cases} \delta' - \delta = \sigma\sigma' \cos P\sigma E, \\ (t - t') \cos \delta = \sigma\sigma' \sin P\sigma E. \end{cases} \quad (13.54)$$

将(13.50)式代入上式得

$$\begin{cases} \delta' - \delta = k' \cos \varphi \sin \sigma E \cos P\sigma E, \\ (t - t') \cos \delta = k' \cos \varphi \sin \sigma E \sin P\sigma E. \end{cases} \quad (13.55)$$

在球面三角形 $P\sigma E$ 中, 又有关系

$$\begin{aligned} \sin \sigma E \cos P\sigma E &= -\sin \delta \cos(90^\circ + t) = \sin \delta \sin t, \\ \sin \sigma E \sin P\sigma E &= \sin(90^\circ + t) = \cos t. \end{aligned}$$

将上列关系代入(13.55)式, 并利用关系 $\alpha' - \alpha = t - t'$ 得

$$\begin{cases} (\delta' - \delta)'' = k' \cos \varphi \sin \delta \sin t, \\ (\alpha' - \alpha)'' = \frac{1}{15} k' \cos \varphi \cos t \sec \delta. \end{cases} \quad (13.56)$$

这就是周日光行差对恒星赤道坐标影响的公式。由此式可知, 当恒星过子午圈时($t=0$), 周日光行差对赤纬完全没有影响, 而对赤经的影响则为最大; 当恒星的时角为 6^h 或 18^h 时, 恰好相反。

一般说来，周日光行差的影响是很小的，通常只在观测赤纬较大的恒星，主要是北极星时，才计算这种影响。

太阳系内的天体，由于它们本身的视运动十分显著，光行差对它们位置的影响，应作特别的讨论，读者可参阅《球面天文学》关于行星光行差的内容。

此外，太阳系的空间运动也造成光行差，这称为长期光行差。这一运动包括太阳本动和银河系自转。太阳本动的速度和方向基本上不变，这一部分长期光行差约为 $13''$ ，只有在研究相对于无本动太阳的问题时，才需要考虑它的影响。在太阳处由于银河系自转而产生的线速度为 250 千米/秒，由此产生的光行差达 100 多角秒。虽然它的数值很大，但周期很长，达 2.5×10^8 年，在数千年中，运动的方向可以看成是不变的。因此，长期光行差对某一恒星位置的影响是常量。但若研究的课题涉及的时间达数十万年以上，这种光行差的影响就同周年光行差相当，必须加以考虑。

§ 13.4 岁差和章动

读者在 § 4.5 中已经熟悉了由于地球自转轴的进动引起的岁差和章动现象。这里将介绍与这些现象相应的天球上基本点的定量运动以及随之而产生的恒星坐标的改变。在本章前几节的讨论中，都把作为天体位置参考基准的天球坐标系看成是固定不变的。但是，由于地球自转轴在空间的指向和地球公转轨道平面的改变，天极、黄极、赤道、黄道和春分点都有以星空为背景的运动；因而，以它们为基本圈和基本点的赤道坐标系和黄道坐标系就时刻改变着在天球上的位置。显然，即使天体本身不动，表征天体位置的坐标值也在不断地变化着。

一、平天极和真天极

§ 4.5 中已经介绍, 由于地球赤道的隆起部分受日月的附加吸引, 北天极绕北黄极沿一个半径为黄赤交角的小圆在约 25800 年中, 顺时针向旋转一周。实际天极的运动轨迹不是小圆, 而是一条如图 4.22 所示的波纹线。为了便于讨论, 把实际天极的运动分解为两种运动: 一是一个假想天极绕黄极的小圆运动, 这个假想天极称为平天极, 常以 P_0 表示; 另一是实际天极即真天极 P 绕平天极的椭圆运动 (图 13.14)。平天极的这种运动就是日月岁差, 真天极的这种运动就是章动。

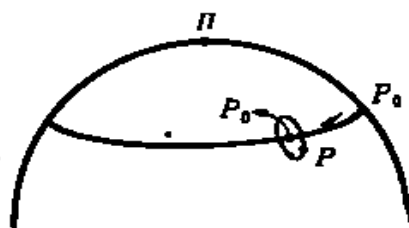


图 13.14 平天极和真天极的运动

章动椭圆的中心是平天极, 椭圆的长轴在 HP_0 方向, 大小约 $18''$, 短轴在平天极的运动方向上, 大小约 $13''$; 真天极在椭圆上顺时针向 (从天球外面看) 运动, 周期约 18.6 年。实际上真天极绕平天极的运动是很多不同周期运动的合成, 其轨迹要比椭圆复杂得多。以上所举仅是其中振幅最大的一项, 常称这一项为主章动项。真天极一面绕平天极作章动运动, 一面随同平天极作日月岁差运动, 两种运动的合成就是真天极在天球上相对于黄极的实际运动。

与某一瞬间的平天极对应的天赤道是该瞬间的平赤道, 同一瞬间的黄道与平赤道的升交点叫做平春分点。相应地, 与某一瞬间的真天极对应的天赤道是该瞬间的真赤道, 同一瞬间的黄道与真赤道的升交点叫做真春分点。

二、日月岁差和行星岁差

岁差现象按产生的不同原因和各自造成的效应区分, 有日月

岁差和行星岁差两种。日月岁差的起因和效应已在 § 4.5 中说明。行星岁差的起因是其他行星对地球公转运动的摄动，从而引起黄道平面缓慢、持续的运动。

1. 日月岁差 图 13.15 中，设 $P_0, \gamma_0, Q_0Q'_0$ 为 t 时的平北

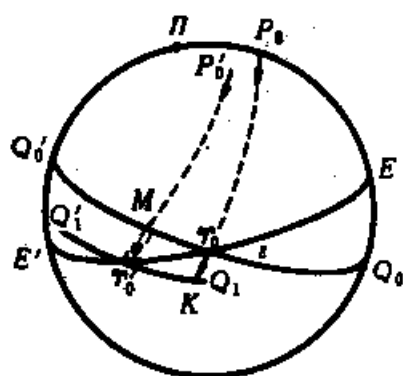


图 13.15 日月岁差

极、平春分点和平赤道； Π, EE' 为该瞬间的北黄极和黄道。由于日月岁差，平天极每时每刻都在沿着以 Π 为圆心，以 ΠP_0 即黄赤交角 ϵ 为半径的小圆运动。其运动的方向是在垂直于 ΠP_0 的切线方向，也就是说平天极的运动总是指向该瞬间的平春分点 γ_0 的方向。这样，到了

另一个瞬间 t_1 时，平天极、平赤道位移至 P'_0 和 $Q_1Q'_1$ ；平春分点则沿黄道位移至 γ'_0 。平春分点的位移方向正好与太阳周年视运动的方向相反，因此也称为春分点的西退。

平天极运动的线速度是以在单位时间内平天极在大圆弧 $P_0\gamma_0$ 上的位移来计量的，表示为 n ，据《中国天文年历》所载，有

$$n = 2004.3109'' - 0.85330'' T - 0.000217'' T^2. \quad (13.57)$$

n 以及本节中各速度量的单位都是角秒/世纪。上式中 T 为从 $J2000.0 = 2000$ 年 1 月 1.5 日起算的儒略世纪数。设 T 对应的瞬间的儒略日为 $J.D.$ ，则 T 由下式算得

$$T = \frac{J.D. - 2451545.0}{36525}. \quad (13.58)$$

不难算得平天极绕黄道的角速度

$$\psi' = \frac{n}{\sin \epsilon} = 5038.77844'' + 0.49263'' T - 0.000124'' T^2, \quad (13.59)$$

这也就是平春分点在黄道上的运动速度。显然，由于春分点的西

退, 所有天体的黄经将以同样的速度增加, 故 ψ' 又称黄经日月岁差。日月岁差并不改变黄道的位置, 所以天体的黄纬不因日月岁差改变。

日月岁差使赤道、春分点不断改变位置, 天体的赤经和赤纬因而不断变化。将平春分点沿黄道的运动在赤道坐标系中分解为沿着赤道(弧 $\gamma_0 K = \gamma_0 M$)和垂直于赤道(弧 $\gamma_0 K$)两个方向的分量, 它们分别为 $\psi' \cos \epsilon$ 和 $\psi' \sin \epsilon = n$ 。前一分量使所有天体的赤经以同样的速度增加, 故 $\psi' \cos \epsilon$ 称为赤经日月岁差。后一分量使所有天体的赤纬变化, 故 n 又称为赤纬日月岁差。

2. 行星岁差 由于行星岁差, 黄极也不是固定不变的。任意瞬间黄极的运动方向是在与连接该瞬间的北黄极 Π 和平北天极 P_0 的大圆 ΠP_0 以西与它成 N 角的大圆弧上(图 13.16),

$$\begin{aligned} N &= 5^\circ 7' 25.018'' \\ &- 3289.4789'' T \\ &- 0.60622'' T^2; \quad (13.60) \end{aligned}$$

其速度是

$$\pi = 47.0029'' - 0.06603'' T + 0.000598'' T^2. \quad (13.61)$$

黄极的这种运动引起黄道平面绕着某一瞬时旋转轴而旋转。瞬时旋转轴近春分点的一端 D 和春分点 γ_0 之间的距离 $D\gamma_0$ 就等于 N 角。

由于黄道的运动, 平春分点沿平赤道由 γ_0 移动到 γ_1 , 方向与赤经增加的方向相同, 其速度为

$$\lambda' = 10.5526'' - 1.88623'' T + 0.000096'' T^2. \quad (13.62)$$

行星岁差使天体的赤经以速度 λ' 减小, 故 λ' 称为赤经行星岁差。行星岁差只引起黄道的运动, 并不改变赤道的位置, 所以天体的

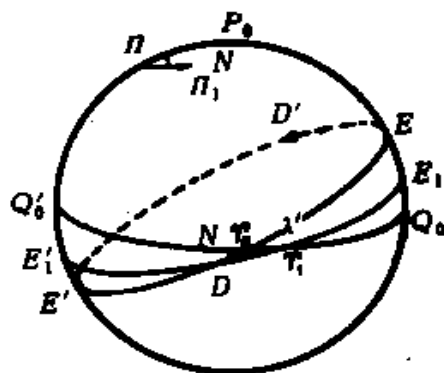


图 13.16 行星岁差

赤纬不受行星岁差的影响。

行星岁差使黄道、春分点不断改变位置，天体的黄经和黄纬不断变化。 λ' 在黄道上的投影 $\lambda' \cos \epsilon$ 称为黄经行星岁差。行星岁差还使黄赤交角发生变化，瞬间 T 时的平黄赤交角的值为

$$\begin{aligned} \epsilon = & 23^{\circ} 26' 21.448'' - 46.8150'' T - 0.00059'' T^2 \\ & + 0.001813'' T^3. \end{aligned} \quad (13.63)$$

3. 春分点的运动 在日月岁差和行星岁差的综合作用下，春分点相对于天球上的固定目标运动着。参阅图 13.17，图中 EE' ， $Q_0Q'_0$ ， γ_0 为 t 时的黄道、平赤道和平春分点； $E_1E'_1$ ， $Q_1Q'_1$ ， γ_1 为 t_1 时的相应圈点。设 t 时的黄道 EE' 与 t_1 时的赤道 $Q_1Q'_1$ 交于 γ'_0 。

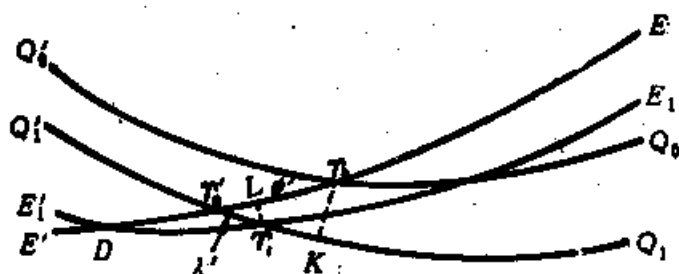


图 13.17 春分点的运动

作 $\gamma_1 L$ 垂直于 EE' ， L 即 γ_1 在 EE' 上之投影。根据前述，并取 $t_1 - t$ 为单位时间间隔，就有 $\gamma_0 \gamma'_0 = \psi'$ ， $\gamma'_0 \gamma_1 = \lambda'$ ，则 $\gamma'_0 L$ 就是黄经行星岁差 $\lambda' \cos \epsilon$ 。因此，在日月岁差和行星岁差的综合作用下，平春分点在黄道上的运动速度为

$$l = \psi' - \lambda' \cos \epsilon, \quad (13.64)$$

l 称为黄经总岁差，其大小为

$$l = 5029.0966'' + 2.22226'' T - 0.0000427'' T^2. \quad (13.65)$$

作 $\gamma_0 K$ 垂直于 $Q_1 Q'_1$ ，则 $\gamma'_0 K$ 就是赤经日月岁差 $\psi' \cos \epsilon$ 。因此，在日月岁差和行星岁差的综合作用下，平春分点在赤道上

的运动速度为

$$m = \psi' \cos \varepsilon - \lambda', \quad (13.66)$$

m 称为赤经总岁差, 其值为

$$m = 307.49575^s + 0.186208^s T - 0.0000185^s T^2, \quad (13.67)$$

从(13.65)式可见, 在岁差的影响下, 平春分点每年在黄道上西退约 $50.3''$ 。太阳连续两次过春分点的时间间隔是一回归年(365.2422 日), 而太阳连续两次过黄道上固定点的时间间隔是一恒星年(365.2564 日), 两者之差正是春分点的运动所致。岁差之名即由此而来。公元前二世纪, 古希腊天文学家喜帕恰斯在比较 150 年间的恒星位置时, 发现恒星的黄经有显著改变, 而黄纬变化则不明显。他认为这是春分点沿黄道西退所造成的, 并在公元前 125 年推算出春分点每百年西移 1° 。这是岁差现象的最早发现。公元 335 年, 我国晋代天文学家虞喜, 根据对冬至日恒星的中天观测, 独立地发现了岁差, 并测算出冬至点每 50 年在黄道上西移 1° 。

三、岁差对恒星坐标的影响

由于天球坐标系的基本平面(赤道面)和计量起点(春分点)的变化, 恒星坐标也在时刻变化着。因此问题就归结为已知恒星相对于 t_0 时刻的平赤道和平春分点的平赤道坐标(α_0, δ_0), 求此恒星相对于 t_1 时刻的平赤道和平春分点的平赤道坐标(α_1, δ_1)。恒星坐标是时间的函数, 可以表示为

$$\alpha_0 = \alpha(t_0), \quad \delta_0 = \delta(t_0)$$

以及

$$\alpha_1 = \alpha(t_1), \quad \delta_1 = \delta(t_1).$$

当 $t_1 - t_0$ 不大, 且 δ 不接近于 90° 时, 也就是恒星的坐标 α 和 δ 变化不大时, $\alpha_1 - \alpha_0$ 和 $\delta_1 - \delta_0$ 可据泰勒级数展开为

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_0 &= (t_1 - t_0) \frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{2} (t_1 - t_0)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} \\ &\quad + \frac{1}{6} (t_1 - t_0)^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \dots, \\ \delta_1 - \delta_0 &= (t_1 - t_0) \frac{d\delta}{dt} + \frac{1}{2} (t_1 - t_0)^2 \frac{d^2\delta}{dt^2} \\ &\quad + \frac{1}{6} (t_1 - t_0)^3 \frac{d^3\delta}{dt^3} + \dots \end{aligned} \right. \quad (13.68)$$

只要推导出各阶导数的表达式, 就可用上式计算岁差对恒星赤道坐标的影响。先推导 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 的表达式。

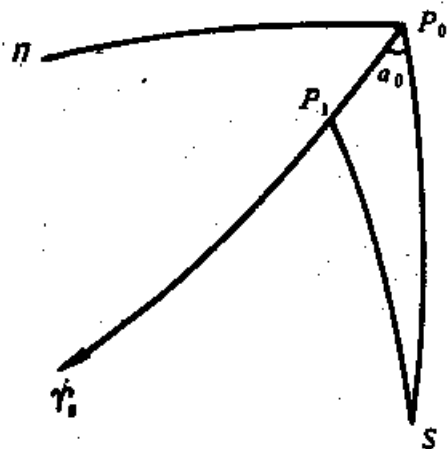


图 13.18 $\frac{d\delta}{dt}$ 的推导

由于 $\frac{d\delta}{dt}$ 只取决于天极的运动, 而与黄极的运动无关, 所以在推导 $\frac{d\delta}{dt}$ 的表达式时不必计及黄极的运动。图 13.18 中, S 为恒星的位置, Π 和 P_0 为瞬间 t_0 黄极和平天极的位置。经过无限小的时间间隔 dt 以后, 平天极运动到 P_1 的位置。因此有

$$P_0P_1 = n dt, \quad (13.69)$$

式中 n 为赤纬日月岁差。 P_0P_1 为一无限小的弧段, 在窄球面三角形 P_0P_1S 中 $P_0S = 90^\circ - \delta_0$, $P_1S = 90^\circ - \delta_1$, 则有

$$\delta_1 - \delta = P_0P_1 \cos \alpha_0.$$

将 (13.69) 式代入上式, 并以无限小量 $d\delta$ 表示 $\delta_1 - \delta$, 则有

$$d\delta = n dt \cos \alpha_0. \quad (13.70)$$

当 dt 趋近于零时就可以得到 (为简明起见略去 α_0 的下标)

$$\frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha. \quad (13.71)$$

$\frac{d\alpha}{dt}$ 由两部分构成: (1) 正如在推导赤经总岁差时所见, 平春分点在赤道上的速度为 m , 方向向西, 因此所有恒星的赤经以 m 的速度增加着, 设这一速度为 $\frac{d\alpha_1}{dt}$, m 既包含了日月岁差, 也包含了行星岁差; (2) 由于平天极向着平春分点运动, 赤经圈在天球上的位置同时发生着变化, 设这一变化速度为 $\frac{d\alpha_2}{dt}$, 这种变化随恒星而异。现在来求恒星赤经因赤经圈改变引起的变化。

图 13.19 中 P_0P_1 是在时间 dt 内平天极的无限小变化; 大圆弧 $A_0A'_0$ 和 $A_1A'_1$ 依次为在无限接近的两个瞬间 t_0 和 t_1 的平赤道的一部分, 这两个平赤道是无限接近的。 P_0SD_0 和 P_1SD_1 依次为这两个瞬间的赤经圈, 它们分别垂直于同一瞬间的平赤道。由于 $A_0A'_0$ 无限接近于 $A_1A'_1$, 弧 D_0B 和弧 CD_1 的差是二阶小量; 若只准确到一阶量, 则可认为 $D_0B = CD_1$ 就是恒星的因赤经圈改变引起的赤经变化。

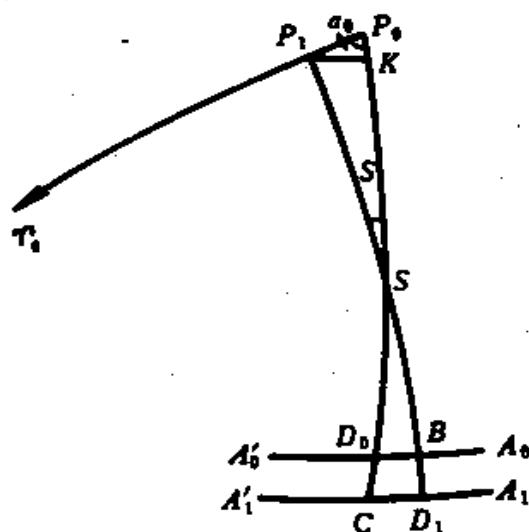


图 13.19 dt 时间内恒星赤经圈的改变

在窄球面三角形 P_1SP_0 中, 作 P_1K 垂直于 P_0S , 并令 $\angle P_1SP_0 = S$, 有

$$P_1K = P_0P_1 \sin \alpha_0 = \sin P_1SP_0 \sin P_1S \approx S \cos \delta_1, \quad (13.72)$$

而由球面三角形 D_0SB 得

$$D_0B = S \sin SD_0 = S \sin \delta_0.$$

由 (13.72) 式和上式易得

$$D_0 B = P_0 P_1 \sin \alpha_0 \frac{\sin \delta_0}{\cos \delta_1}. \quad (13.73)$$

将(13.69)式代入上式, 在三角函数式内可取 $\delta_0 = \delta_1$, 则得

$$d\alpha_2 = D_0 B = n dt \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0. \quad (13.74)$$

当 dt 趋近于零时, 就可得到 D_0 点沿赤道的位移速度, 即 $\frac{d\alpha_2}{dt}$, 等于 $n \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0$. 把它与赤经总岁差相加得到

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta. \quad (13.75)$$

(13.71)和(13.75)式就是所要求的结果。将这两式求时间的导数, 就得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = & \frac{dm}{dt} + \frac{1}{2} n^2 \sin 2\alpha \\ & + \left(\frac{dn}{dt} \sin \alpha + mn \cos \alpha \right) \operatorname{tg} \delta + n^2 \sin 2\alpha \operatorname{tg}^2 \delta, \end{aligned} \quad (13.76)$$

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{dn}{dt} \cos \alpha - mn \sin \alpha - n^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \delta. \quad (13.77)$$

若要求(13.68)式准确到 $0.01''$, 时间间隔 $t_1 - t_0$ 不超过一年时, 可只取到一次项; 而时间间隔不超过 25 年时, 也只需要取到二次项。

四、章动

真天极绕平天极的运动定义为章动。它本质上是地球自转轴空间运动的一部分, 由许多不同周期的运动合成。主章动项与月亮轨道升交点黄经有关, 周期是 18.6 年, 其他项是太阳和月亮的平黄经、平近点角以及月亮轨道升交点黄经的组合。主章动项椭圆半长径是 $9.2025''$ (对于 $J2000$ 历元, 见 § 13.5) 这个值叫做章动常数。

图 13.20 中, 设 Π , P_0 , P 分别为某一瞬间的北黄极、平天

极和真天极, γ_0, γ 为平春分点和真春分点。平赤道和黄道的夹角 ϵ_0 称为平黄赤交角, 真赤道和黄道的夹角 ϵ 称为真黄赤交角。伴随着真天极绕平天极的周期运动, 真春分点相对于平春分点, 真赤道相对于平赤道作相应的运动, 黄赤交角也有周期性的变化。令 $\Delta\psi$ 表示自真春分点起计量的平春分点的黄经, 即 $\gamma - \gamma_0$ (等于 $\angle P_0 P P_1$)。 $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_0$, 则 $\Delta\psi, \Delta\epsilon$ 的变化直接反映了真天极相对于平天极的运动。因此, 就能以这两个量表征真天极的章动。 $\Delta\psi$ 叫做黄经章动, $\Delta\epsilon$ 叫做交角章动。

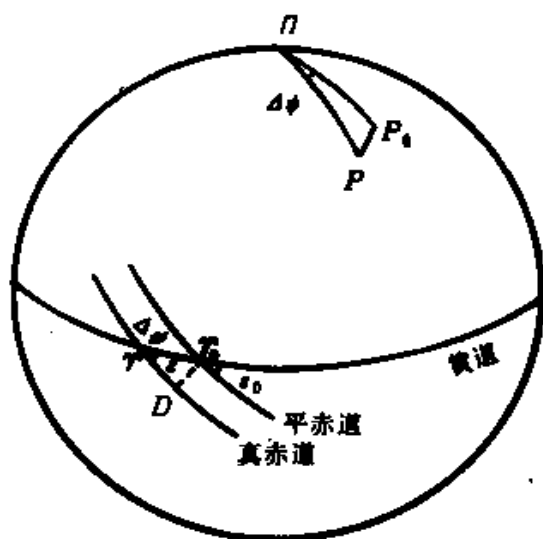


图 13.20 真天极对于平天极的运动

1984 年以前计算章动是依据美国天文学家伍拉德 (E. W. Woolard) 在 1953 年建立的章动理论, 这个理论的基础是刚体地球模型, 章动常数取的是经验值, 与其他天文常数不相一致。1984 年起章动依据瓦尔 (J. Wahr) 和木下宙 (H. Kinoshita) 得出的“1980IAU 章动理论”计算, 其展开式包括周期自 4.7 日至 6798.4 日的、系数大于 $0.0001''$ 的各项, 有黄经章动和交角章动各 106 项。下面列出其中主要的几项

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\psi = -(17.1996'' + 0.01742'' T) \sin \Omega \\ \quad + (0.2062'' + 0.00002'' T) \sin 2\Omega \\ \quad - (1.3187'' + 0.00016 T) \sin 2L + \dots \\ \Delta\epsilon = -(9.2025'' + 0.00089'' T) \cos \Omega \\ \quad - (0.0895'' - 0.00005'' T) \cos 2\Omega \\ \quad + (0.5736'' - 0.00031'' T) \cos 2L + \dots \end{array} \right. \quad (13.78)$$

式中, Ω 为白道升交点的平黄经, 自瞬时平春分点起量, L 为太阳几何平黄经。

实际应用中, 把所有章动项分为长周期项和短周期项两种, 以周期 35 天为分界。短周期项以 $d\psi$, $d\varepsilon$ 表示。

如果仅仅取(13.78)式的首项, 即主章动项来表示章动, 显而易见真天极的运动轨迹是一个椭圆(图 13.21)。由于椭圆很小, 可以把这部分球面图形作为平面图形处理。椭圆的中心为平天极 P_0 。以 P_0 为原点, 作一直角坐标系, 取 $P_0\gamma_0$ 为 x 轴的正向, $P_0\Pi$ 为 y 轴的负向。章动椭圆的长轴和短轴分别在 y 轴和 x 轴上。

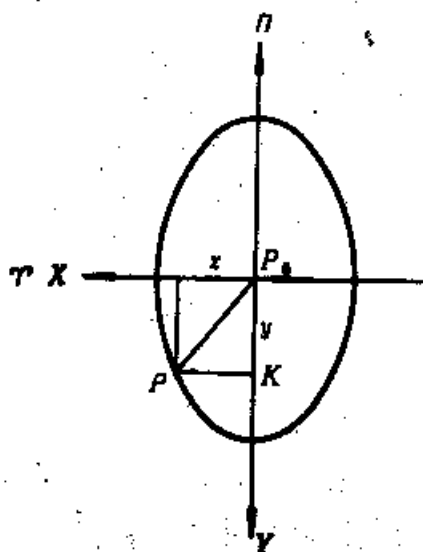


图 13.21 章动椭圆

真天极 P 对于平天极的运动可以用它在这个坐标系中的坐标来表示。当 P 点的 y 坐标变化时, 天极与黄极的距离改变了, 即黄赤交角 ε 发生变化, 就有 $y = \Delta\varepsilon$ 。 P 点的 x 坐标可以从牵球面三角形 $P\Pi K$ 中求出, 其中 $PK = x$, $\angle P\Pi K = \Delta\psi$, $\Pi K = \varepsilon$, 有 $x = \Delta\psi \sin \varepsilon$ 。

自真春分点起计量的平春分点的赤经叫做赤经章动。在图 13.20 中, 作 γ_0 在真赤道系中的赤经圈 $P\gamma_0 D$, 因 $\gamma\gamma_0 = \Delta\psi$ 是

小于 $20''$ 的量, $\gamma_0 \gamma D$ 可看作为平面三角形, 所以 $\gamma D = \Delta\psi \cos \varepsilon_0$. 这就是赤经章动, 也就是黄经章动在真赤道上的投影。在《中国天文年历》的“世界时和恒星时表”中, 给出了每天世界时 0^h 的赤经章动。

五、章动对恒星坐标的影响

由真天极和真春分点决定的恒星坐标称为真坐标或真位置; 由平天极和平春分点决定的恒星坐标称为平坐标或平位置。讨论章动对恒星坐标的影响, 也就是求恒星的平位置和真位置之间的换算。

图 13.22 中, Π , P_0 和 P 是某一瞬间的黄极、平天极和真天极, 令恒星 S 的平赤道坐标为 α_0 , δ_0 , 相应的真坐标为 α , δ , 则有 $PS = 90^\circ - \delta$, $P_0S = 90^\circ - \delta_0$, P_0S 和 x 轴间夹角为 α_0 。令 P_0P 与 x 轴的夹角为 ξ , 由于 P_0P 是微量, 则在窄球面三角形 SP_0P 中有

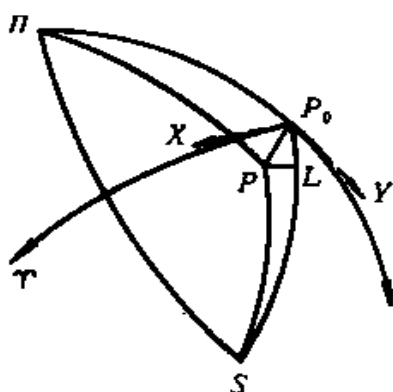


图 13.22 章动对恒星坐标的影响

$$\begin{aligned} \delta - \delta_0 &= P_0P \cos SP_0P = P_0P \cos (\alpha_0 - \xi) \\ &= P_0P \cos \xi \cos \alpha_0 + P_0P \sin \xi \sin \alpha_0 \\ &= x \cos \alpha_0 + y \sin \alpha_0. \end{aligned}$$

将由 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\varepsilon$ 表示的 x , y 代入上式得

$$\delta - \delta_0 = \Delta\psi \sin \varepsilon \cos \alpha_0 + \Delta\varepsilon \sin \alpha_0. \quad (13.79)$$

这就是章动对赤纬影响的公式。有时将上式中三角函数号内的平赤经用真赤经来代替。

至于章动对赤经的影响, 也可分两部分考虑, 即(1)由于真春分点对于平春分点的偏离, 使所有恒星的赤经发生变化, 其值为

赤经章动, (2) 由于真天极对于平天极的偏离, 天体赤经圈的位置发生改变, 这种变化随恒星而异。仿照(13.73)式的推导, 易得第二种原因引起的赤经变化为

$$D_0 B = P_0 P \sin SP_0 P \operatorname{tg} \delta_0. \quad (13.80)$$

在上述推导中, 以真天极 P 代替了图 13.19 中的平天极 P_1 。必须强调指出, 要注意 P 和 P_1 的区别: 在涉及章动时, P 和 P_0 是在同一瞬间的两个点; 在涉及岁差时, P_1 和 P_0 是在不同瞬间的两个点, P_1 是 P_0 运动了 dt 时间后到达的位置。

由(13.80)式易得

$$\begin{aligned} D_0 B &= P_0 P \sin(\alpha_0 - \xi) \operatorname{tg} \delta_0 \\ &= P_0 P \cos \xi \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0 - P_0 P \sin \xi \cos \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0 \\ &= x \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0 - y \cos \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0 \\ &= \Delta \psi \sin \epsilon \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0 - \Delta \epsilon \cos \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0. \end{aligned}$$

将上式与赤经章动相加则得

$$\alpha - \alpha_0 = \Delta \psi (\cos \epsilon + \sin \epsilon \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0) - \Delta \epsilon \cos \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0. \quad (13.81)$$

这就是章动对赤经影响的公式。

习惯上以 $\Delta \psi$, $\Delta \epsilon$ 代表章动长周期项, 以 $d\psi$, $d\epsilon$ 代表章动短周期项, 所以(13.79)和(13.81)式常写成

$$\begin{cases} \alpha - \alpha_0 = (\Delta \psi + d\psi) (\cos \epsilon + \sin \epsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \\ \quad - (\Delta \epsilon + d\epsilon) \operatorname{tg} \delta \cos \alpha, \\ \delta - \delta_0 = (\Delta \psi + d\psi) \sin \epsilon \cos \alpha + (\Delta \epsilon + d\epsilon) \sin \alpha. \end{cases} \quad (13.82)$$

至于计算岁差和章动的准确公式, 读者可参阅《球面天文学》。

六、平恒星时和真恒星时

大家知道春分点在某地子午圈连续两次上中天所经过的时间

间隔，称为一恒星日；任意瞬间的恒星时，以该瞬间春分点的时角来量度。既然由于岁差和章动的影响，春分点有缓慢的位置变化，由此而区分为平春分点和真春分点。那么以春分点的周日运动为依据的恒星日和恒星时也就有真恒星日和平恒星日以及真恒星时和平恒星时的区别。任意瞬间的真恒星时 S_{α} 和平恒星时 S 的差就是该瞬间的赤经章动，即有

$$S_{\alpha} = S + \frac{1}{15} (\Delta\psi + d\psi) \cos \epsilon, \quad (13.83)$$

赤经章动可由天文年历上的表列时刻内插至所求时刻而得。由于它是黄经章动在赤道上的分量，它和黄经章动一样，也包含长周期项和短周期项：长周期项变化在 $\pm 1.2^{\circ}$ 之间，短周期项变化在 $\pm 0.02^{\circ}$ 之间。赤经章动的变化是不均匀的，因此真恒星时不是均匀的时间标尺，它只能用来确定时刻，不能用来计量间隔。

事实上，平恒星时也不是均匀的时间标尺。春分点在天球上周日运动的速率是地球自转角速度与春分点位移速度的合成，因此平恒星时 S 的变化可以表示为

$$\frac{dS}{dt} = \omega + m, \quad (13.84)$$

式中 ω 为地球自转角速度， m 为春分点在赤道上的运动速度即赤经总岁差。由(13.67)式知，赤经总岁差并非常数，而包含有时间的一阶项和二阶项。由此可见，即使 ω 是常数（即假定地球自转是均匀的），平恒星时还会由于岁差而呈现长期变化，所以平恒星时并不是一个均匀的时间计量系统。

例四、求 1986 年 5 月 27 日南京地方真恒星时 $11^{\text{h}}23^{\text{m}}48.965^{\text{s}}$ 相应的地方平恒星时。

本题关键在于求所给瞬间的赤经章动，计算步骤如下：

(1) 计算所给瞬间的世界时时刻 M 。

$$\text{由 } M = (s - \lambda - S_0)(1 - \nu)$$

$$s = 11^{\text{h}}23^{\text{m}}49^{\text{s}}, \text{ 南京的经度 } \lambda = 7^{\text{h}}55^{\text{m}}4^{\text{s}},$$

S_0 为 5 月 27 世界时 0^{h} 的格林尼治真恒星时, 由《中国天文年历》的“世界时和恒星时表”查得

$$S_0 = 16^{\text{h}}17^{\text{m}}1^{\text{s}}.$$

$$s = 11^{\text{h}}23^{\text{m}}49^{\text{s}}$$

$$-\lambda = -7 \ 55 \ 4$$

$$-S_0 = -16 \ 17 \ 1$$

$$\hline 11 \ 11 \ 44$$

$$-(s - \lambda - S_0)\nu = - \quad 1 \ 50 \quad (\text{由《中国天文年历》附表 2 查得})$$

$$M = 11^{\text{h}}9^{\text{m}}54^{\text{s}}$$

(2) 判断所给瞬间所在的格林尼治日期 d_G , 这也就是内插基准日期。设地方日期为 d , 则若 $M + \lambda > 24^{\text{h}}$, $d_G = d - 1$; $M + \lambda < 24^{\text{h}}$, $d_G = d$ 。由上列 M 和 λ 的值可见, 本题中 $M + \lambda < 24^{\text{h}}$, 故 $d_G = d$, 即 5 月 27 日。

(3) 求内插因子 n 。赤经章动在每天的世界时 0^{h} 给出, 因此内插因子就是将上列世界时时刻 M 化为日的小数, 即

$$n = \frac{M}{24^{\text{h}}} = \frac{11^{\text{h}}9^{\text{m}}54^{\text{s}}}{24^{\text{h}}} = 0.4625.$$

上式结果可由《中国天文年历》附表 4 以时分秒为引数直接查得。

(4) 求所给瞬间的赤经章动值。由“世界时和恒星时表”见 5 月 27 日前后赤经章动变化的二次差的绝对值 $|\Delta''| \approx 0.003'' \sim 0.004''$, 对于本题所要求的精度 $0.001''$ 来说, 二次差可以忽略, 故只需用线性内插。自此表内查取 5 月 27 日和 5 月 28 日两天的赤经章动, 并求出它们的一次差

	赤经章动	Δ'
5月27日	-0.5251^s	
5月28日	-0.5163	$+0.0088^s$

作线性内插

$$\begin{array}{r}
 -0.5251^s \\
 n\Delta' = +0.0041 \\
 \hline
 \text{内插值} = -0.521
 \end{array}$$

(5) 求所给瞬间的平恒星时。由(13.83)式

$$s = 11^h 23^m 48.965^s - (-0.521^s) = 11^h 23^m 49.486^s。$$

§ 13.5 恒星位置的归算

许多天体测量的课题是通过观测恒星来测定时间或测定观测地点的经度和纬度。在观测结果的归算中，都要求知道所观测的恒星在观测瞬间的实际位置(即坐标)。恒星位置通常由星表或天文年历查取。由于恒星位置每时每刻都在变化，星表中通常就只列出某一特定瞬间的平位置。实际位置和星表位置之间的差值，包含着影响恒星位置的各种因素，即大气折射、周日视差、周年视差、周日光行差、周年光行差、岁差和章动。考虑到这种种因素的影响，才能将星表位置换算到实际位置，或作相反的换算。这就是恒星位置的计算问题。

一、恒星的各各种位置

恒星的位置因所影响的因素不同而可分为观测位置、视位置、真位置、平位置、年首平位置和星表历元平位置等。各种位置的确切含义如下。

观测位置。用天文仪器直接测定并已消除仪器误差的影响后

所得的天体位置。

视位置。观测位置作了大气折射、周日视差和周日光行差改正后所得的地心坐标。它相当于一个位于地心的观测者在没有大气的情况下所见天体的位置。视位置参考于由观测瞬间的真赤道和真春分点所确定的真赤道坐标系。

真位置。视位置作了周年视差和周年光行差改正后所得的日心坐标。它相当于一个位于日心的观测者所见天体的位置，仍参考于观测瞬间的真赤道坐标系。

观测瞬间平位置。真位置作了章动改正后所得的日心坐标。它仍然相当于一个位于日心的观测者所见天体的位置，不过参考于由观测瞬间的平赤道和平春分点所确定的平赤道坐标系。

年首平位置。恒星在某一儒略年首的平赤道和平春分点所确定的平赤道坐标系内的日心坐标。从观测归算的要求来说，要选取观测瞬间所在年的年首以求年首平位置。年首平位置和观测瞬间平位置之差是年首到观测瞬间之间的岁差和恒星在此期间的自行引起的。恒星在不同年首的平位置其差别是各年首之间的岁差和自行。

星表历元平位置。在一本星表中，所有恒星的坐标都是对于同一年的年首平坐标。这一年的年首就称为这本星表的历元。大部分星表都采用公历纪元数为25的整倍数的某年年首作为历元，例如1900.0，1950.0，1975.0，2000.0等

根据1976年国际天文学联合会大会的决议，从1984年起，天文年历和新编星表采用新的标准历元2000年1月1.5日，记作 $J2000.0$ 。这时的儒略日是 $JD=2451545.0$ 。某年的儒略年首与标准历元的间隔为儒略年365.25日的倍数，例如1985年儒略年首在1月0.75日，记作 $J1985.0$ ；1986年儒略年首在1月1.0日，记作 $J1986.0$ 等等。

1984 年以前采用的年首是所谓的贝塞耳假年岁首或称贝塞耳年首, 现在仍然可以使用。它的定义是: 加了光行差改正后由平春分点起算的平太阳赤经为 $18^h 40^m$ 的瞬间。用年份前加符号 B , 年份后加 .0 表示, 例如 1986 年贝塞耳年首在 1 月 0.6424 日, 记作 $B1986.0$ 。贝塞耳年长可以取 $B1900.0$ ($JD=2415020.31352$) 的回归年长度 365.242198781 日。欲求下一年的贝塞耳年首, 可在当年的贝塞耳年首加 365.2422 日得出。例如已知 1986 年的贝塞耳年首, 易得 1987 年的贝塞耳年首为 1 月 0.8846 日, 记作 $B1987.0$ 等等。

由此可知, 已知儒略日 JD , 儒略历元可以表示为

$$J2000.0 + (JD - 2451545.0) / 365.25 \quad (13.85)$$

而贝塞耳历元为

$$B1900.0 + (JD - 2415020.31352) / 365.242198781. \quad (13.86)$$

因此也不难算得同一年的儒略年首和贝塞耳年首之间的时间间隔。

在天体测量工作中, 实际观测量常常是恒星过天球上某一特定圆圈的时刻或天顶距, 然后在一个地心天球上解天文三角形 (即以天极、观测地点的天顶和恒星为顶点的球面三角形), 来决定所求的量。这种情况下, 就必须知道恒星的视位置。对于一颗恒星来说, 周日视差影响甚微, 可以忽略不计; 倘若观测量涉及天顶距, 则需根据观测时的大气状况 (气温、气压等) 改正大气折射; 周日光行差与观测地点的纬度有关, 亦宜单独算出直接在观测量上改正。这样也就将观测量化到地心天球上去了。恒星视位置可从星表历元平位置出发, 按下述关系求取

年首平位置 = 星表历元平位置 + 岁差 + 自行,

观测瞬间平位置 = 年首平位置 + 岁差 + 自行,

真位置 = 观测瞬间平位置 + 章动,

视位置 = 真位置 + 周年光行差 + 周年视差。

实际归算时因周年光行差、周年视差、岁差和章动等改正与观测地点无关, 通常把上列后三个式子综合成一式计算, 即

视位置 = 年首平位置 + 岁差 + 章动 + 周年光行差
+ 周年视差 + 自行。

二、由恒星视位置表内插求视位置

《中国天文年历》包含有一个“恒星视位置表”。表中列出了 1217 颗赤纬在 $\pm 80^\circ$ 之间的恒星的视位置, 依赤经的次序排列。每 10 天给出它们在世界时 0^h 的视位置值。表列日期是儒略日的整数部分能被 10 整除的。

欲求任意日期观测瞬间的恒星视位置, 要由表列值进行内插, 主要问题在于求出内插因子 n 。为了要求得 n , 最好能知道观测时刻大概的世界时 M 。由于恒星的视位置变化较慢, M 不需要非常准确。

设在经度为 λ 的地方进行观测, 其时为 d 日的地方平时 m , 易得相应的世界时 $M = m - \lambda$ 。观测瞬间所在的格林尼治日期 d_G 则应据 $m - \lambda$ 的符号判别。若 $m - \lambda < 0$, 则 $d_G = d - 1$, 且相应地 M 加上 24^h 化为正值; 若 $m - \lambda \geq 0$, 则 $d_G = d$ 。然后在恒星视位置表中找出在 d_G 日前和它最接近的日期 d_0 , 这一天就是内插的基准, 于是 n 由下式求得

$$n = \frac{1}{10} \left(d_G - d_0 + \frac{M}{24^h} \right). \quad (13.87)$$

由《中国天文年历》附表 4“化时分秒为日的小数”, 以 M 为引数能直接查得 $\frac{M}{24^h}$ 。求得 n 以后可按贝塞耳内插公式或拉格朗日内插

公式计算观测瞬间的视位置。为方便计算,《中国天文年历》附表 10 和附表 11 分别给出贝塞耳内插系数和贝塞耳内插中的二次差订正值;附表 12 给出拉格朗日三点内插系数。在精度要求不高的情况下,甚至可用线性内插。

如果观测时记录的不是地方平时,而是地方恒星时时刻刻,则应首先按恒星时化平时的方法求出相应的世界时。如果在恒星于地方子午圈上中天时进行观测,则可取表列就近日期上的视赤经作为观测瞬间的恒星时,进一步再求内插因子。

例五、求 1986 年 10 月 1 日北京时间 $2^{\text{h}}47^{\text{m}}$ 仙女 $\xi(\xi \text{ And})$ 的视位置。

计算步骤如下。

(1) 计算观测瞬间的世界时 M 。北京时间是东 8 区时,有

$$M = 2^{\text{h}}47^{\text{m}} - 8^{\text{h}} = 18^{\text{h}}47^{\text{m}}.$$

(2) 判断观测瞬间所在的格林尼治日期 d_G , 并确定内插基准日期 d_0 。由上可见 $m - \lambda < 0$, 故知 d_G 为 9 月 30 日, 由《一九八六年中国天文年历》的“恒星视位置表”查得 d_0 为 9 月 27 日。

(3) 求内插因子 n 。由(13.87)式

$$n = \frac{1}{10} (30 - 27 + 18^{\text{h}}47^{\text{m}}/24^{\text{h}}) = 0.3783.$$

上式中右端第二项由《中国天文年历》附表 4 以时、分为引数直接查得为 0.783。

(4) 求观测瞬间的恒星视位置。可用贝塞耳内插或拉格朗日三点内插, 在精度要求不高的场合, 可用线性内插。分别计算如下。

贝塞耳内插。在非拱极星的情况下, 恒星视位置十天变化的三次差 $\Delta''' < 60$ 单位(赤经 0.001° , 赤纬 $0.01''$ 分别为 1 单位), 用至二次差即可满足。从“恒星视位置表”内 d_0 日前一个表列值起查

取 α 和 δ 的连续四个表列值, 并求出相应的一、二次差

	α	Δ'	Δ''
9月17日	$1^h21^m33.779^s$		
9月27日	33.975	+0.196 ^s	-0.045 ^s
10月7日	34.126	+0.151	-0.045 ^s
10月17日	34.232	+0.106	
	δ	Δ'	Δ''
9月17日	$+45^\circ27'34.57''$		
9月27日	37.31	+2.74''	-0.03''
10月7日	40.02	+2.71	-0.13
10月17日	42.60	+2.58	

应用二次贝塞耳内插公式

$$f(t_0 + n\omega) = f(t_0) + n\Delta'_\frac{1}{2} + B_2(\Delta''_0 + \Delta''_1).$$

由《中国天文年历》附表 10“贝塞耳内插系数表”以 n 为引数可查得上式中之 B_2 ; 或可由附表 11“二次差订正表”以 n 和 $(\Delta''_0 + \Delta''_1)$ 为引数直接查得上式中之 $B_2(\Delta''_0 + \Delta''_1)$ 项。

对于 α $\Delta'_\frac{1}{2} = +0.151^s$, $(\Delta''_0 + \Delta''_1) = -0.090^s$,

对于 δ $\Delta'_\frac{1}{2} = +2.71''$, $(\Delta''_0 + \Delta''_1) = -0.16''$,

由附表 10 查得 $B_2 = -0.0588$,

由此得到

	α	δ
	$1^h21^m33.975^s$	$+45^\circ27'37.31''$
$n\Delta'_\frac{1}{2}$	+ 0.0571	+ 1.025
$B_2(\Delta''_0 + \Delta''_1)$	+ 0.0053	+ 0.009
	$\alpha_{视} = 1^h21^m34.037^s$;	$\delta_{视} = +45^\circ27'38.34''$.

拉格朗日三点内插。应用拉格朗日三点内插公式

$$f = L_{-1} \times f_{-1} + L_0 \times f_0 + L_1 \times f_1$$

式中 f_0 为函数的表列基准值, f_{-1} 和 f_1 分别为 f_0 前和后相邻的两个表列值; L_{-1} , L_0 和 L_1 为拉格朗日三点内插公式系数, 可以用 n 为引数由《中国天文年历》附表 12“拉格朗日三点内插系数”表查得。

先由“恒星视位置表”查得 9 月 17 日、9 月 27 日和 10 月 7 日赤经和赤纬的各三个表列值, 依次为赤经或赤纬的 f_{-1} , f_0 和 f_1 ; 具体值已如前面所列。

再由附表 12 以 $n=0.3783$ 为引数查得

$$L_{-1} = -0.1176, L_0 = 0.8571, L_1 = 0.2604.$$

由此得到

	α		δ	
	$1^{\text{h}}21^{\text{m}}$		$+45^{\circ}27'$	
$L_{-1}f_{-1}$	-	3.9724 ^s	-	4.065"
L_0f_0	+	29.1200	+	31.978
L_1f_1	+	8.8864	+	10.421
$\alpha_{\text{视}} = 1^{\text{h}}21^{\text{m}}34.034^{\text{s}};$		$\delta_{\text{视}} = + 45^{\circ}27'38.33''.$		

注意在上面的运算中, 把赤经中三项的共同部分 $1^{\text{h}}21^{\text{m}}$ 和赤纬中三项的共同部分 $45^{\circ}27'$ 都提在外面, 这样可以简化运算。

由于两种内插方法不同, 结果有微小差异。

线性内插。如果只要求赤经精确至 0.01^{s} , 相应地赤纬精确至 $0.1''$, 则可应用线性内插。这时只需求一次差。易得

	α		δ	
	$1^{\text{h}}21^{\text{m}}33.975^{\text{s}}$		$+ 45^{\circ}27'37.31''$	
$n\Delta'_{\frac{1}{2}}$	+	0.057	+	1.02
$\alpha_{\text{视}} = 1^{\text{h}}21^{\text{m}}34.03^{\text{s}};$		$\delta_{\text{视}} = + 45^{\circ}27'38.33''.$		

例六、求 1986 年 10 月 1 日南京地方恒星时 $3^{\text{h}}19^{\text{m}}$ 仙女 ξ (ξ And) 的视位置。

计算步骤如下。

(1) 将地方恒星时化为世界时。仿例四的计算步骤(1), 查得这天的 $S_0 = 0^{\text{h}}37^{\text{m}}44^{\text{s}}$, 易得 $M = 18^{\text{h}}47^{\text{m}}$ 。

(2) 判断观测瞬间所在的格林尼治日期 d_G , 并确定内插基准日期 d_0 。仿例四的计算步骤(2), 由于 $M + \lambda = 26^{\text{h}}42^{\text{m}} > 24^{\text{h}}$, $d_G = d - 1$, 即 d_G 为 9 月 30 日, 且 d_0 为 9 月 27 日。

以下各步骤同例五。

例七、求 1986 年 10 月 1 日仙女 ξ (ξ And) 在南京上中天时的视位置。

(1) 求恒星上中天时的地方恒星时。由《一九八六年中国天文年历》的“恒星视位置表”查得和 10 月 1 日最接近的日期为 9 月 27 日。这一天恒星的赤经近似值为 $1^{\text{h}}21^{\text{m}}34^{\text{s}}$, 故可取观测瞬间的地方恒星时为 $1^{\text{h}}22^{\text{m}}$ 。

(2) 将地方恒星时化为世界时, 得 $M = 16^{\text{h}}50^{\text{m}}$ 。

以下各步骤仿例五。对于内插基准 9 月 27 日世界时 0^{h} , 可求得内插因子 $n = 0.3701$ 。进而用贝塞尔二次内插(或拉格朗日三点内插)求得南京上中天时的视位置

$$\alpha_{\text{视}} = 1^{\text{h}}21^{\text{m}}34.036^{\text{s}}; \delta_{\text{视}} = +45^{\circ}27'38.32''.$$

此处, 在恒星视位置表中没有计及章动短周期项的影响, 这是因为章动短周期项的变化较快, 对于每 10 天给出一值的恒星视位置, 不适宜于用内插法进行计算。为要精确地求取恒星视位置, 还要加入章动短周期项的影响, 具体的计算方法将在本节的第四部分讨论。

三、由星表历元平位置计算年首平位置

许多恒星的视位置没有在天文年历中刊出, 只能根据星表中

给出的星表历元平位置来计算。首先要算出观测历元所在年的年首平位置。

不同瞬间的恒星平位置之间的差别，是岁差和自行造成的。设 α_0, δ_0 为恒星在星表历元 t_0 时的平位置； α', δ' 为在观测年年首 t' 时的平位置，则根据(13.68)式，取前面三项，并加自行改正后有

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha_0 + \mu_\alpha(t' - t_0) + (t' - t_0) \frac{d\alpha}{dt} \\ \quad + \frac{(t' - t_0)^2}{2} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{(t' - t_0)^3}{6} \frac{d^3\alpha}{dt^3}, \\ \delta' = \delta_0 + \mu_\delta(t' - t_0) + (t' - t_0) \frac{d\delta}{dt} \\ \quad + \frac{(t' - t_0)^2}{2} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{(t' - t_0)^3}{6} \frac{d^3\delta}{dt^3}. \end{cases} \quad (13.88)$$

式中 μ_α 和 μ_δ 分别为恒星的赤经周年自行和赤纬周年自行。若取 dt 为一年，则 $\frac{d\alpha}{dt}$ 和 $\frac{d\delta}{dt}$ 分别为 α 和 δ 的周年岁差。它们和相应的周年自行之和是恒星位置的周年变化，简称年变，记为 AV_α 和 AV_δ ，即

$$AV_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} + \mu_\alpha,$$

$$AV_\delta = \frac{d\delta}{dt} + \mu_\delta.$$

$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \frac{d^2\delta}{dt^2}$ 是周年岁差的变化。岁差的变化很小，一般取100年内的变化列于星表中，称为百年变化或长期变化，记为 SV_α 和 SV_δ ，即

$$SV_\alpha = 100 \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$SV_{\delta} = 100 \frac{d^2 \delta}{dt^2}.$$

至于 $\frac{d^3 \alpha}{dt^3}$ 和 $\frac{d^3 \delta}{dt^3}$ 的值更微不足道, 通常把星表中这两项的值扩大一百万倍, 并与展式中的系数合并计算后列出, 称为第三项, 记为 $3_a^d t$, $3_{\delta}^d t$, 即

$$3_a^d t = \frac{100^3}{6} \frac{d^3 \alpha}{dt^3},$$

$$3_{\delta}^d t = \frac{100^3}{6} \frac{d^3 \delta}{dt^3}.$$

于是(13.88)式可改写成下列形式

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha_0 + (t' - t_0) AV_{\alpha} + \frac{(t' - t_0)^2}{200} SV_{\alpha} + \left(\frac{t' - t_0}{100} \right)^3 3_a^d t, \\ \delta' = \delta_0 + (t' - t_0) AV_{\delta} + \frac{(t' - t_0)^2}{200} SV_{\delta} + \left(\frac{t' - t_0}{100} \right)^3 3_{\delta}^d t. \end{cases}$$

(13.89)

每本星表除列出恒星的星表历元平位置外, 同时列出该星的年变、长期变化和第三项。

四、由年首平位置计算视位置

由恒星的年首平位置 α' , δ' 计算观测瞬间 t 的视位置, 包括下列几个步骤: (1) 由年首平位置计算观测瞬间平位置 α_{π} , δ_{π} , 为此应加年首 t' 到观测瞬间 t 期间的岁差和自行改正; (2) 由 α_{π} , δ_{π} 计算观测瞬间真位置 α_{κ} , δ_{κ} , 应加章动改正; (3) 由 α_{κ} , δ_{κ} 计算视位置 α , δ , 应加周年光行差和周年视差改正。

令 $\tau = t - t'$, 并取年为单位。 t 在上半年, t' 取当年年首; t 在下半年, t' 取下一午年首。这样, τ 的采用值恒小于 0.5, 计算岁差改正便可只取第一项。上述第一步的公式, 据(13.75)和(13.71)式为

$$\begin{cases} \alpha_{\pi} = \alpha' + (m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \tau + \mu_{\alpha} \tau, \\ \delta_{\pi} = \delta' + n \cos \alpha \tau + \mu_{\delta} \tau. \end{cases} \quad (13.90)$$

第二步的公式, 据(13.82)式为

$$\begin{cases} \alpha_{\kappa} = \alpha_{\pi} + (\Delta \psi + d\psi)(\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \\ \quad - (\Delta \varepsilon + d\varepsilon) \cos \alpha \operatorname{tg} \delta, \\ \delta_{\kappa} = \delta_{\pi} + (\Delta \psi + d\psi) \sin \varepsilon \cos \alpha + (\Delta \varepsilon + d\varepsilon) \sin \alpha. \end{cases} \quad (13.91)$$

第三步的公式, 应据(13.32)和(13.46)式列出。事实上, 周年视差甚小的恒星, 不需加周年视差改正。若周年视差较大, 则可将周年视差并入周年光行差一起计算, 只需对贝塞耳日数 C 和 D 加修正即成。于是有

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_{\kappa} + Cc + Dd, \\ \delta = \delta_{\kappa} + Cc' + Dd'. \end{cases} \quad (13.92)$$

或由(13.48)式

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_{\kappa} + \frac{1}{15} h \sin(H + \alpha) \sec \delta, \\ \delta = \delta_{\kappa} + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta. \end{cases} \quad (13.93)$$

实际计算时, 总是把上述各步骤合并在一起进行, 直接由岁首平位置 α' , δ' 算出视位置 α , δ 。通常采用两种类型的计算公式。

1. 第一种计算公式。将(13.90)式代入(13.91)式中可得

$$\begin{cases} \alpha_{\kappa} = \alpha' + (m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \tau + (\Delta \psi + d\psi) \cos \varepsilon \\ \quad + (\Delta \psi + d\psi) \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \\ \quad - (\Delta \varepsilon + d\varepsilon) \cos \alpha \operatorname{tg} \delta + \mu_{\alpha} \tau, \\ \delta_{\kappa} = \delta' + n \cos \alpha \tau + (\Delta \psi + d\psi) \sin \varepsilon \cos \alpha \\ \quad + (\Delta \varepsilon + d\varepsilon) \sin \alpha + \mu_{\delta} \tau. \end{cases} \quad (13.94)$$

根据(13.59)和(13.66)式, 可将 $\sin \varepsilon$ 和 $\cos \varepsilon$ 分别表示为

$$\sin \varepsilon = \frac{n}{\psi'}, \quad \cos \varepsilon = \frac{m + \lambda'}{\psi'},$$

将它们代入(13.94)式中, 则得

$$\begin{aligned} \alpha_{\kappa} = & \alpha' + \left(\frac{m}{n} + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \right) n\tau + (\Delta\psi + d\psi) \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \\ & - (\Delta\varepsilon + d\varepsilon) \cos \alpha \operatorname{tg} \delta + (\Delta\psi + d\psi) \frac{m + \lambda'}{\psi'} + \mu_{\alpha} \tau. \end{aligned}$$

上式经整理后与 δ_{κ} 一起得

$$\begin{cases} \alpha_{\kappa} = \alpha' + [n\tau + (\Delta\psi + d\psi) \sin \varepsilon] \left(\frac{m}{n} + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \right) \\ \quad - (\Delta\varepsilon + d\varepsilon) \cos \alpha \operatorname{tg} \delta + (\Delta\psi + d\psi) \frac{\lambda'}{\psi'} + \mu_{\alpha} \tau, \\ \delta_{\kappa} = \delta' + [n\tau + (\Delta\psi + d\psi) \sin \varepsilon] \cos \alpha \\ \quad + (\Delta\varepsilon + d\varepsilon) \sin \alpha + \mu_{\delta} \tau. \end{cases} \quad (13.95)$$

在(13.95)式中, 用符号 a, b, a', b' 表示和恒星坐标有关的因子, 用符号 A, B, A', B' 和 E 表示和时间有关的因子, 这些量分别定义为

$$\begin{cases} A = n\tau + \Delta\psi \sin \varepsilon, & a = \frac{1}{15} \left(\frac{m}{n} + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \right), \\ A' = d\psi \sin \varepsilon, & b = \frac{1}{15} \cos \alpha \operatorname{tg} \delta, \\ B = -\Delta\varepsilon, & a' = \cos \alpha, \\ B' = -d\varepsilon, & b' = -\sin \alpha. \\ E = \frac{\lambda'}{\psi'} (\Delta\psi + d\psi), & \end{cases} \quad (13.96)$$

将(13.96)式代入(13.95)式, 则得下列简单形式

$$\begin{cases} \alpha_{\kappa} = \alpha' + (A + A') a + (B + B') b + E + \mu_{\alpha} \tau, \\ \delta_{\kappa} = \delta' + (A + A') a' + (B + B') b' + \mu_{\delta} \tau. \end{cases} \quad (13.97)$$

再将(13.97)式代入(13.92)式, 最后可得

$$\begin{cases} \alpha^s = \alpha' + (A + A')a + (B + B')b + Cc + Dd + E + \mu_a \tau, \\ \delta'' = \delta' + (A + A')a' + (B + B')b' + Cc' + Dd' + \mu_\delta \tau. \end{cases} \quad (13.98)$$

这是计算观测瞬间视位置的第一种计算公式， α 的单位是时间单位， δ 的单位是角度单位。式中 A, B, A', B', E 和 C, D 一样都称为贝塞耳日数。在《中国天文年历》中，刊有两个贝塞耳日数表，一个以每日的世界时 0^h 为准，另一个以每日的格林尼治恒星时 0^h 为准，列出各个贝塞耳日数以及该日基准时刻的年的小数 τ ， τ 在上半年为正值，在下半年为负值。 a, b, a', b' 和 c, d, c', d' 一样都称为恒星常数，某些星表在给出恒星位置的同时也给出恒星常数值。至于恒星的年自行 μ_a, μ_δ 也都列出在星表中。

如前所述，在我国天文年历的恒星视位置表中，没有包含章动短周期项的影响。对于精确的计算，应在恒星视位置的内插值上加这项改正，所用公式为

$$\begin{cases} \Delta\alpha^s = A'a + B'b, \\ \Delta\delta'' = A'a' + B'b'. \end{cases} \quad (13.99)$$

2. 第二种计算公式。这一种计算恒星视位置的公式具有三角函数的形式，顾及 α 采用时间单位，把(13.94)式写为

$$\begin{cases} \alpha_{\text{真}} = \alpha' + \frac{1}{15} (A + A') \left(\frac{m}{n} + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \right) \\ \quad + \frac{1}{15} (B + B') \cos \alpha \operatorname{tg} \delta + E + \mu_a \tau, \\ \delta_{\text{真}} = \delta' + (A + A') \cos \alpha + (B + B') \sin \alpha + \mu_\delta \tau. \end{cases} \quad (13.100)$$

引入另一组符号

$$\begin{cases} f = \frac{1}{15} \frac{m}{n} (A + A') + E = \frac{1}{15} [m\tau + (\Delta\psi + d\psi) \cos \epsilon], \\ g \cos G = A + A', \\ g \sin G = B + B'. \end{cases} \quad (13.101)$$

将上列符号代入(13.100)式, 经整理后得

$$\begin{cases} \alpha_{\kappa} = \alpha' + f + \frac{1}{15} g \sin (G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + \mu_{\alpha} \tau, \\ \delta_{\kappa} = \delta' + g \cos (G + \alpha) + \mu_{\delta} \tau. \end{cases} \quad (13.102)$$

再将上式代入(13.93)式, 得计算观测瞬间恒星视位置的第二种公式

$$\begin{cases} \alpha^s = \alpha' + f + \frac{1}{15} g \sin (G + \alpha) \operatorname{tg} \delta \\ \quad + \frac{1}{15} h \sin (H + \alpha) \sec \delta + \mu_{\alpha} \tau, \\ \delta'' = \delta' + g \cos (G + \alpha) + h \cos (H + \alpha) \sin \delta \\ \quad + i \cos \delta + \mu_{\delta} \tau. \end{cases} \quad (13.103)$$

式中, f, g, G 和 h, H, i 一样称为独立日数。《中国天文年历》中刊有一个“独立日数表”, 以每日的世界时 0^h 为准列出各个独立日数以及用于计算章动短周期项改正的独立日数 f', g', G' 。后三个日数的定义为

$$\begin{cases} f' = \frac{1}{15} d\psi \cos \epsilon, \\ g' \cos G' = A', \\ g' \sin G' = B'. \end{cases} \quad (13.104)$$

容易导出用它们求章动短周期项的改正为

$$\begin{cases} \Delta\alpha^s = f' + \frac{1}{15} g' \sin (G' + \alpha) \operatorname{tg} \delta, \\ \Delta\delta'' = g' \cos (G' + \alpha). \end{cases} \quad (13.105)$$

若已知恒星的恒星常数，或欲求一颗恒星的许多视位置，宜用贝塞耳日数进行计算；否则，以用独立日数较为简便。贝塞耳日数和独立日数都必须由表列基准时刻内插到观测时刻。由于内插是在一天之内进行的，用线性内插足以保证精度。

3. 二阶项订正 对于 $|\delta| > 60^\circ$ 的恒星，由 (13.98) 式或 (13.103) 式所得的恒星视位置还必须加上二阶项改正，即这两式应分别改为

$$\begin{cases} \alpha^s = \alpha' + (A + A')\alpha + (B + B')b + Cc + Dd \\ \quad + E + \mu_\alpha \tau + J_\alpha \operatorname{tg}^2 \delta, \\ \delta'' = \delta' + (A + A')\alpha' + (B + B')b' + Cc' + Dd' \\ \quad + \mu_\delta \tau + J_\delta \operatorname{tg} \delta; \end{cases} \quad (13.106)$$

$$\begin{cases} \alpha^s = \alpha' + f + \frac{1}{15}g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta \\ \quad + \frac{1}{15}h \sin(H + \alpha) \sec \delta + \mu_\alpha \tau + J_\alpha \operatorname{tg}^2 \delta, \\ \delta'' = \delta' + g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta \\ \quad + i \cos \delta + \mu_\delta \tau + J_\delta \operatorname{tg} \delta. \end{cases} \quad (13.107)$$

上两式中， J_α 和 J_δ 依次为包含光行差、岁差和章动影响的赤经和赤纬的二阶项改正系数，它们的表达式为

$$\begin{cases} J_\alpha = \frac{1}{15}PQ \sin 1'', \\ J_\delta = -\frac{1}{2}P^2 \sin 1'', \end{cases} \quad (13.108)$$

其中

$$\begin{aligned} P &= (A + A' \pm D) \sin \alpha + (B + B' \pm C) \cos \alpha \\ &= g \sin(G + \alpha) \pm h \sin(H + \alpha), \\ Q &= (A + A' \pm D) \cos \alpha - (B + B' \pm C) \sin \alpha \\ &= g \cos(G + \alpha) \pm h \cos(H + \alpha). \end{aligned}$$

上两式中的 $\pm$ 号对北纬恒星 ($\delta > 0$) 取 $+$ 号；南纬恒星 ($\delta < 0$) 取

一号。

《中国天文年历》中刊有以日期和赤经为引数查取 J_α 和 J_δ 的“二阶项订正系数表”。

精确计算恒星视位置可用直角坐标转换的矩阵方法，读者可参阅《球面天文学》的有关章节。

例八、求 1986 年 6 月 1 日北京夏令时 20^h39^m 牧夫 α (α Boo) 的视位置。

计算步骤如下。

1. 由星表历元平位置计算年首平位置 (1) 从《全天亮星星表》(南京大学编, 1970) 查得此星在星表历元 1975.0 的下列值

$$\begin{aligned}\alpha_{1975.0} &= 14^h44^m 4.382^s, & AV_\alpha &= + 2.8003^s, \\ SV_\alpha &= + 0.0028^s, & 3\frac{d}{dt}t &= + 0.005^s, \\ \mu_\alpha &= - 0.0042^s, \\ \delta_{1975.0} &= +17^\circ 4' 9.50'', & AV_\delta &= -15.179'', \\ SV_\delta &= + 0.274'', & 3\frac{d}{dt}t &= + .11'', \\ \mu_\delta &= - 0.058''.\end{aligned}$$

(2) 计算 1986.0 的平位置。由于是在上半年, 计算当年的年首平位置。用 (13.89) 式, $t' - t_0 = 11$, $\frac{(t' - t_0)^2}{200} = 0.605$, $\left(\frac{t' - t_0}{100}\right)^3 = 0.001331$, 则有

$$\begin{array}{rcl}\alpha_{1975.0} & = & 14^h44^m 4.382^s \\ (t' - t_0)AV_\alpha & = & 30.8033 \\ \frac{(t' - t_0)^2}{200}SV_\alpha & = & 0.0017 \\ \left(\frac{t' - t_0}{100}\right)^3 3\frac{d}{dt}t & = & 0.0000 \\ \hline \alpha_{1986.0} & = & 14^h44^m 35.187^s,\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\delta_{1975.0} & = + & 17^{\circ} 4' 9.50'' \\
(t' - t_0) AV_s & = - & 166.969 \\
\frac{(t' - t_0)^2}{200} SV_s & = + & 0.166 \\
\left(\frac{t' - t_0}{100}\right)^3 3a_t & = & 0.000 \\
\hline
\delta_{1986.0} & = + & 17^{\circ} 1' 22.70''.
\end{array}$$

2. 由年首平位置计算视位置 由于观测时刻按平太阳时给出, 宜用世界时 0^h 为准的日数表。

(1) 计算观测瞬间的世界时 M 。北京夏令时比北京时间多 1 小时, 因此该瞬间的世界时

$$M = 20^h 39^m - 9^h = 11^h 39^m.$$

(2) 判断基准日期。若 $m - \lambda \geq 0$, 基准日期即观测日期, 否则应提前一天。本例中基准日期即 6 月 1 日。

(3) 求内插因子 n 。由《中国天文年历》附表 4 以 M 为引数查得 $n = 0.4854$ 。

(4) 求贝塞耳日数的内插值。从《中国天文年历》的“贝塞耳日数(世界时 0^h 为准)表”, 查得 6 月 1 日和 6 月 2 日的表列值, 并求一次差和线性内插值。

τ	Δ	$A + A'$	Δ	$B + B'$	Δ
6 月 1 日 + 0.4134		+ 4.923'		- 7.768''	
6 月 2 日 + 0.4162	+ 0.0028	+ 4.948	+ 0.025'	- 7.757''	+ 0.011''
内插值 + 0.4148		+ 4.936''		- 7.763''	
C	Δ	D	Δ	E	Δ
6 月 1 日 - 6.446''		- 18.947''		- 0.0012''	
6 月 2 日 - 6.149	+ 0.297''	- 19.062	- 0.115''	- 0.0012	0
内插值 - 6.302''		- 19.003''		- 0.0012''	

(5) 求恒星常数。根据(13.96)式和(13.44)式进行计算, 先求下列各量, 式中 α , δ 取 1986.0 的平位置。

$$\frac{m}{n} = 2.30093,$$

$$\sin \alpha = -0.657988,$$

$$\cos \alpha = -0.753028,$$

$$\sin \delta = +0.292755,$$

$$\cos \delta = +0.956188,$$

$$\operatorname{tg} \delta = +0.306169,$$

$$\sec \delta = +1.045819,$$

$$\epsilon = 23^{\circ} 26' 28.00'',$$

$$\operatorname{tg} \epsilon = +0.433591.$$

然后计算恒星常数

$$a = \frac{1}{15} \left(\frac{m}{n} + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \right) = +0.14055,$$

$$b = \frac{1}{15} \cos \alpha \operatorname{tg} \delta = -0.01537,$$

$$c = \frac{1}{15} \cos \alpha \sec \delta = -0.05250,$$

$$d = \frac{1}{15} \sin \alpha \sec \delta = -0.04588,$$

$$a' = \cos \alpha = -0.7530,$$

$$b' = -\sin \alpha = +0.6580,$$

$$c' = \operatorname{tg} \epsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta = 0.6072,$$

$$d' = \cos \alpha \sin \delta = -0.2205.$$

(6) 求恒星视位置。对于 $|\delta| < 60^{\circ}$ 的恒星可不必考虑 J_{α} , J_{δ} 的影响, 故用(13.103)式计算。将以上几个步骤求得的各项代入式中

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_{1986.0} & = & 14^{\text{h}}44^{\text{m}}35.187^{\text{s}} \\
(A+A')a & = & +0.6938 \\
(B+B')b & = & +0.1193 \\
Cc & = & +0.3309 \\
Dd & = & +0.8719 \\
E & = & -0.0012 \\
\mu_{\alpha}\tau & = & -0.0017 \\
\hline
\alpha & = & 14^{\text{h}}44^{\text{m}}37.200^{\text{s}}, \\
\delta_{1986.0} & = & +17^{\circ}1'22.70'' \\
(A+A')a' & = & -3.717 \\
(B+B')b' & = & -5.108 \\
Cc' & = & -3.827 \\
Dd' & = & +4.190 \\
\mu_{\delta}\tau & = & -0.024 \\
\hline
\delta & = & +17^{\circ}1'14.21''.
\end{array}$$

实际上, 因为不知道恒星常数, 本例宜用独立日数计算。关于使用独立日数的实例在后面再举。

例九、求 1986 年 6 月 1 日南京地方恒星时 $12^{\text{h}}13^{\text{m}}$ 牧夫 γ (γ Boo) 的视位置。

上例已求出此星 1986.0 的平位置。由于观测时刻以恒星时给出, 宜用以格林尼治恒星时 0^{h} 为准的贝塞耳日数表求视位置。

(1) 计算观测瞬间的格林尼治恒星时

$$S = s - \lambda = 12^{\text{h}}13^{\text{m}} - 7^{\text{h}}55^{\text{m}} = 4^{\text{h}}18^{\text{m}}.$$

(2) 判断内插基准所在的格林尼治日期 d_c 。内插基准是格林尼治恒星时 0^{h} , 观测瞬间是在地方恒星时 s , 在同一天内的这两个瞬间, 哪一个在前, 哪一个在后, 并不能一目了然, 可按图 13.23 所示进行判断。

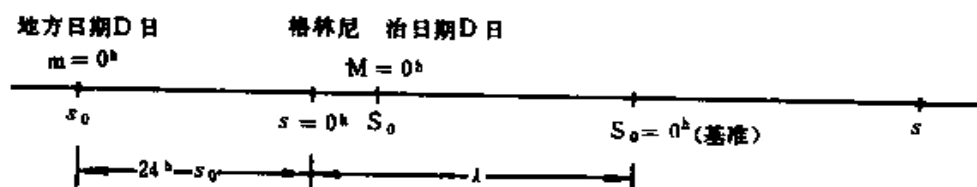


图 13.23 内插基准的判别

图中 $m=0^h$ 表示地方平时 0^h ，即地方日期开始的瞬间，相应的地方恒星时为 s_0 ； $M=0^h$ 表示世界时 0^h ，即格林尼治同一日期开始的瞬间，相应的格林尼治恒星时为 S_0 。 $s=0^h$ 和 $S=0^h$ 分别为同一日期内的地方恒星时 0^h 和格林尼治恒星时 0^h （即内插基准）。显然，问题归结为比较从 s_0 至 s 和从 s_0 至 $S=0^h$ 两段时间间隔的长短。令前一间隔为 Δs ，后一间隔为 ΔB ，则有

$$\Delta s = s - s_0 \approx S - S_0,$$

s_0 和 S_0 相差很小，一般可以忽略，例如在南京 s_0 比 S_0 小 $1^m 18^s$ 。 S_0 可从《中国天文年历》的“世界时和恒星时”表查取。由于 Δs 是时间间隔，应恒取正值。另一方面有

$$\Delta B = 24^h - s_0 + \lambda \approx 24^h - S_0 + \lambda.$$

在本例中，查得 6 月 1 日 $S_0 = 16^h 37^m$ ，则易算得

$$\Delta s = 19^h 36^m, \Delta B = 15^h 18^m, \Delta s > \Delta B.$$

故知观测瞬间在基准之后，这正是图 13.23 所示的情况。因而取基准日期为观测日期，即 6 月 1 日。

另外还有一个方法也可以作上述判别。就是把观测瞬间的地方恒星时时刻化为世界时时刻，然后将此刻化为日的小数，与“贝塞耳日数表”中相应日期的小数部分相比较，来判断观测瞬间与基准瞬间的先后。本例中不难算得与 s 相应的世界时时刻 $M = 11^h 39^m = 0.485^d$ 。而 6 月 1 日基准所在瞬间相当于 0.307^d 。由此知道观测瞬间在基准瞬间之后。

(3) 求内插因子 n 。由《中国天文年历》附表 4，以 S 为引数查得 $n = 0.1792$ 。

(4) 求贝塞耳日数的内插值。从《中国天文年历》的“贝塞耳日数(恒星时 0^h 为准)表”查得 6 月 1 日和 6 月 2 日的表列值, 并求一次差和线性内插值。注意这时不必顾及日期上的小数部分。

τ	Δ	$A+A'$	Δ	$B+B'$	Δ
6 月 1 日 +0.4143		+4.930"		-7.767"	
6 月 2 日 +0.4170	+0.0027	+4.957	+0.027"	-7.750	+0.017"
内插值 +0.4148		+4.935"		-7.764"	

C	Δ	D	Δ	E	Δ
6 月 1 日 -6.355"		-18.982"		-0.0012"	
6 月 2 日 -6.058	+0.297"	-19.096	-0.114"	-0.0012"	0
内插值 -6.302"		-19.002"		-0.0012"	

以下各步按例八计算, 最后得

$$\alpha = 14^h 44^m 37.200^s,$$

$$\delta = +17^\circ 1' 14.21''.$$

例十、求 1986 年 11 月 10 日仙后 ϵ (ϵ Cas) 在南京上中天时的视位置。

计算步骤如下:

1. 由星表历元平位置计算年首平位置

(1) 从《全天亮星星表》查得此星星表历元 1975.0 的下列值

$$\alpha_{1975.0} = 2^h 26^m 58.990^s, \quad AV_\alpha = +4.9814^s,$$

$$SV_\alpha = +0.1355^s, \quad 3\mu_\alpha t = +0.074^s,$$

$$\mu_\alpha = -0.0023^s;$$

$$\delta_{1975.0} = +67^\circ 17' 28.49'', \quad AV_\delta = +16.074'',$$

$$SV_\delta = -0.441'', \quad 3\mu_\delta t = -0.54'',$$

$$\mu_\delta = +0.016''.$$

(2) 计算 1987.0 的平位置。由于是在下半年, 计算下一年

的年首平位置。用(13.89)式, $t' - t_0 = 12$, $\frac{(t' - t_0)^2}{200} = 0.720$, $\left(\frac{t' - t_0}{100}\right)^3 = 0.001728$, 则有

$$\begin{array}{rcl}
 \alpha_{1975.0} & = & 2^{\text{h}} 26^{\text{m}} 58.990^{\text{s}} \\
 (t' - t_0) AV_{\alpha} & = & + 59.7768 \\
 \frac{(t' - t_0)^2}{200} SV_{\alpha} & = & + 0.0976 \\
 \left(\frac{t' - t_0}{100}\right)^3 3\delta_{\alpha} t & = & + 0.0001 \\
 \hline
 \alpha_{1987.0} & = & 2^{\text{h}} 27^{\text{m}} 58.864^{\text{s}} \\
 \delta_{1975.0} & = & + 67^{\circ} 17' 28.49'' \\
 (t' - t_0) AV_{\delta} & = & + 192.888 \\
 \frac{(t' - t_0)^2}{200} SV_{\delta} & = & - 0.318 \\
 \left(\frac{t' - t_0}{100}\right)^3 3\delta_{\delta} t & = & - 0.001 \\
 \hline
 \delta_{1987.0} & = & + 67^{\circ} 20' 41.06''
 \end{array}$$

2. 由年首平位置计算视位置 由于观测瞬间是恒星上中天, 可取这一瞬间的地方恒星时等于 1987.0 的平赤经, 即取 $s = 2^{\text{h}} 28^{\text{m}}$ 。本例计算的是单颗恒星的视位置, 且恒星常数未知, 以用独立日数计算较为简便。独立日数只给出以世界时 0^{h} 为准的值, 内插因子要用世界时计算。

(1) 计算观测瞬间的世界时时刻。将 $s = 2^{\text{h}} 28^{\text{m}}$ 化为世界时, 易得

$$M = 14^{\text{h}} 55^{\text{m}}.$$

(2) 判断基准日期。由于 $m + \lambda < 24^{\text{h}}$, 基准日期就是观测日期。

(3) 求内插因子 n 。由《中国天文年历》附表 4 以 M 为引数查得 $n = 0.6215$ 。

(4) 求独立日数的内插值。从《中国天文年历》的“独立日数表”查得 11 月 10 日和 11 月 11 日的表列值, 并求一次差和线性内插值。

τ	Δ	f	Δ	g	Δ
11月10日 -0.1431		-0.8475 ^s		10.242 ^{''}	
	+0.0028		+0.0046 ^s		+0.003
11月11日 -0.1403		-0.8429		10.245	
内插值 -0.1414,		-0.8446,		10.244 ^{''} ,	

G	Δ	h	Δ	H	Δ
11月10日 15 ^h 49 ^m 34 ^s		19.944 ^{''}		2 ^h 37 ^m 44 ^s	
	+51 ^s		+0.032 ^{''}		-235 ^s
11月11日 15 50 25		19.976		2 33 49	
内插值 15 ^h 50 ^m 6 ^s ,		19.964 ^{''} ,		2 35 18,	

i	Δ
11月10日 +5.493 ^{''}	
	-0.106 ^{''}
11月11日 +5.387	
内插值 +5.427.	

(5) 求二次差订正。此星赤纬大于 +60°, 应计及二次差订正项。从《中国天文年历》的“二阶项订正系数表”以日期和 $\alpha_{1987.0}$ 为引数查得。

	2 ^h	3 ^h
11月6日	+0.000014 ^s	+0.000008 ^s
11月16日	+0.000022	+0.000020

先对于 11 月 10 日纵向内插得

	2 ^h	3 ^h
11月10日	+0.000017	+0.000013

再将 $\alpha_{1987.0}$ 的分秒部分化为时的小数, 由《中国天文年历》附表 7 “化分秒为时的小数”查得为 0.466, 以此为内插因子作横向内插得 $J_a = +0.000015^s$ 。

同理得 $J_s = -0.0002''$ 。

(6) 求恒星视位置。根据(10.107)式, 式中三角函数内的 α 和 δ 取 1987.0 的年首平位置, 先求下列量

$$\begin{aligned}\delta_{1987.0} &= +67^\circ 20' 41'', & \sin \delta &= 0.92284, \\ \cos \delta &= 0.38519, & \operatorname{tg} \delta &= 2.39583, \\ \sec \delta &= 2.59615, \\ G + \alpha &= 18^h 18^m 5^s, & \sin(G + \alpha) &= -0.99688, \\ \cos(G + \alpha) &= 0.07882, \\ H + \alpha &= 5^h 3^m 17^s, & \sin(H + \alpha) &= 0.96953, \\ \cos(H + \alpha) &= 0.24495.\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{array}{rcl}\alpha_{1987.0} & = & 2^h 27^m 58.864^s \\ f & = & -0.8446 \\ \frac{1}{15} g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta & = & -1.6311 \\ \frac{1}{15} h \sin(H + \alpha) \sec \delta & = & +3.3500 \\ \mu_\alpha \tau & = & +0.0003 \\ J_\alpha \operatorname{tg}^2 \delta & = & +0.0001 \\ \hline \alpha & = & 2^h 27^m 59.739^s \\ \delta_{1987.0} & = & +67^\circ 20' 41.06'' \\ g \cos(G + \alpha) & = & +0.807 \\ h \cos(H + \alpha) \sin \delta & = & +4.513 \\ i \cos \delta & = & +2.090 \\ \mu_\delta \tau & = & -0.002 \\ J_\delta \operatorname{tg} \delta & = & 0.000 \\ \hline \delta & = & +67^\circ 20' 48.47''\end{array}$$

例十一、求例五中的章动短周期项修正。

应用(13.99)式或(13.105)式，计算步骤如下。

用贝塞耳日数。(1) 求贝塞耳日数的内插值。由《中国天文年历》的“贝塞耳日数(以世界时 0^h 为准)表”，查得 A' 和 B' ，以此例 $n=0.3783$ 为引数，求观测瞬间的内插值

	A'	Δ	B'	Δ
10 月 1 日 +0.058"			-0.063"	
10 月 2 日 +0.024		-0.034"	-0.101	-0.048"
内插值	+0.045"		-0.081"	

(2) 计算章动短周期项改正。用贝塞耳日数计算章动短周期项要用到恒星常数，这可以从《中国天文年历》的“恒星视位置表”中该恒星的最后两行查到。仙女 ξ 的相应值为

$$a = +0.177, \quad b = +0.063,$$

$$a' = +0.937, \quad b' = -0.348,$$

则有

$$\Delta\alpha = A'a + B'b = 0.003^s,$$

$$\Delta\delta = A'a' + B'b' = 0.07''.$$

用独立日数。(1) 求独立日数的内插值。由《中国天文年历》的“独立日数表”，查得 f' , g' 和 G' ，并求观测瞬间的内插值。

	f'	Δ	g'	Δ	G'	Δ
10 月 1 日 0.0089 ^s			0.086"		20 ^h 50 ^m	
10 月 2 日 0.0036		-0.0053 ^s	0.104	+0.018"	18 53	-117 ^m
内插值	0.0069 ^s ,		0.093",		20 ^h 6 ^m .	

(2) 计算章动短周期项改正。先计算下列值

$$G' + \alpha = 21^h 28^m,$$

$$\sin(G' + \alpha) = -0.616,$$

$$\cos(G' + \alpha) = 0.788.$$

公式中的 $\operatorname{tg} \delta$ 值可以从《中国天文年历》的“恒星视位置表”中该恒星栏的倒数第三行查得。仙女 ξ 的值为 $\operatorname{tg} \delta = +1.016$, 则有

$$\Delta \alpha \approx f' + \frac{1}{15} g' \sin(G' + \alpha) \operatorname{tg} \delta = 0.003^{\circ},$$

$$\Delta \delta = g' \cos(G' + \alpha) = 0.07''.$$

第十四章 恒星位置的测定和基本坐标系的建立

§ 14.1 子午测定恒星赤道坐标的原理和仪器

一、原理

利用目视方法来测定恒星的赤道坐标 α 和 δ ，简便而又切实可行的途径是子午观测，如图 14.1 所示。在恒星 σ 中天的一瞬间，将天文望远镜对准恒星。对于上中天的恒星，应有：

$$\alpha = s = T + u, \quad (14.1)$$

$$\delta = \varphi \mp z, \quad (14.2)$$

式中 s 为中天瞬间的地方恒星时， T 为按天文钟记录下来的恒星

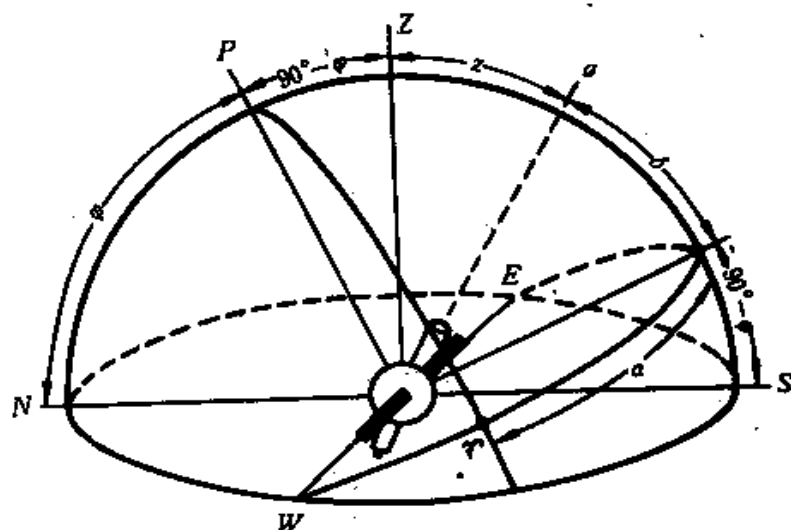


图 14.1 子午观测原理图

过子午圈的观测时刻, u 为天文钟的钟差。 φ 为观测地点的纬度, z 为恒星中天时的天顶距。在(14.2)式中, 如恒星在天顶 Z 以南上中天, 应取负号; 如在天顶以北上中天, 则取正号。

由(14.1)和(14.2)式可知, 通过子午观测来测定恒星的赤经时, 应记录恒星的中天时刻, 并需已知天文钟的钟差; 而测定恒星的赤纬时, 则需测量恒星中天的天顶距, 并应定出观测地点的纬度。

同样地, 对于下中天的恒星有:

$$\alpha = s + 12^h = T + u + 12^h, \quad (14.3)$$

$$\delta = 180^\circ - \varphi - z. \quad (14.4)$$

由上两式可知, 观测量和已知量与上中天观测的情况完全相同。

二、子午环的构造

在 § 3.5 中, 已介绍过子午环这种大型天体测量仪器, 它可用来分别测定恒星的赤经和赤纬。

子午环的结构如图 14.2 所示, 它由望远镜、水平轴、精密垂

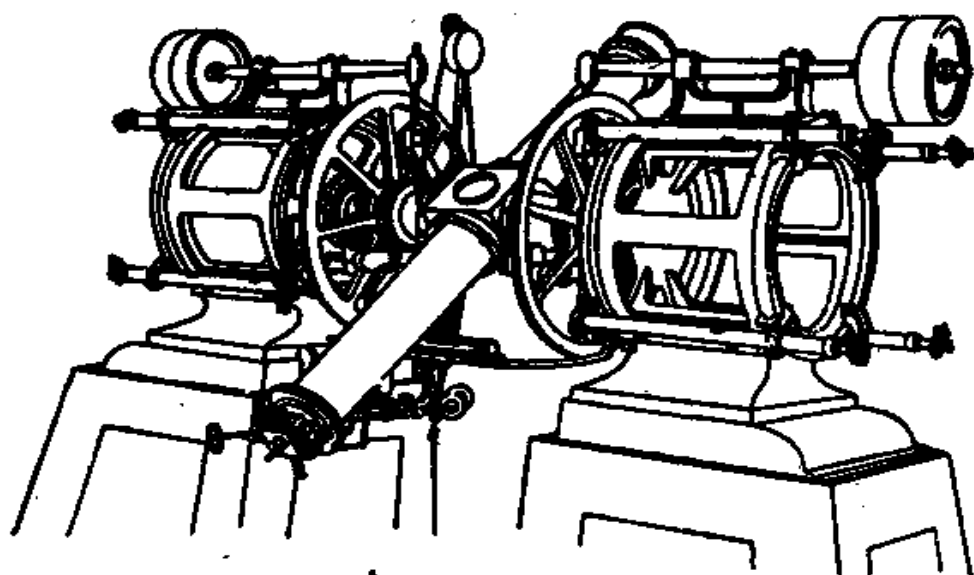


图 14.2 子午环结构图

直度盘等部件组成。安装子午环时，应保证其望远镜能准确地指向天子午圈。通过天文钟来记录恒星的中天时刻，而利用精密度盘能读出恒星的中天天顶距。

子午环的望远镜和水平轴如图 14.3 所示。望远镜与水平轴通过仪器的中央立方体连接在一起。水平轴的两端称为轴颈，用硬合金精密加工成圆柱状，其截面应为严格的圆形，且两轴颈的直径应相等。轴颈躺放在 V 形支架上，支架安装在石头柱子上。安装子午环时，应保证水平轴位于水平面内，并指向东西方向。为讨论方便起见，将两轴颈中心的连线 HH' 取为水平轴。

望远镜的口径一般为 20 厘米左右，焦距约为 2 米。望远镜的

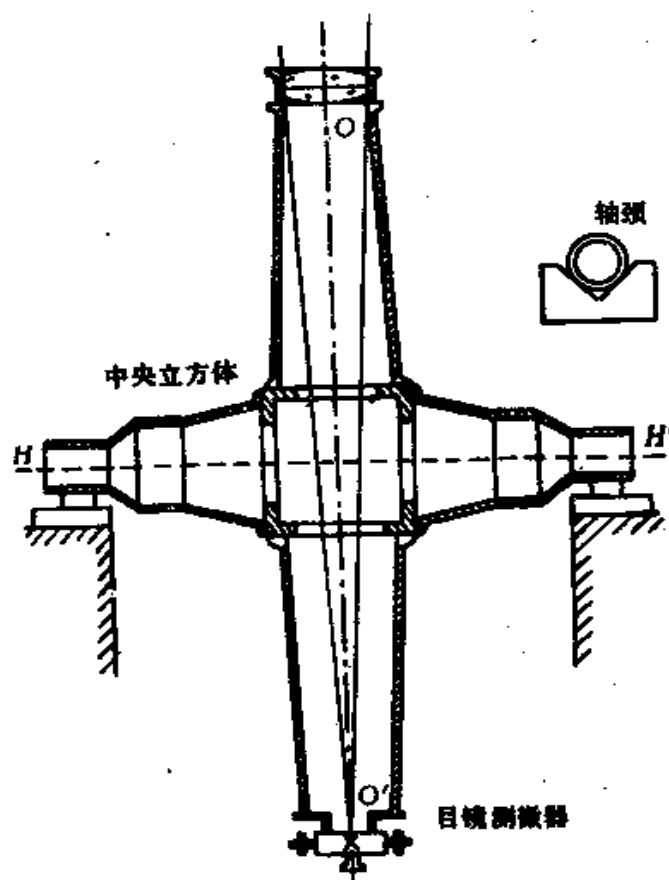


图 14.3 子午环的望远镜和水平轴

目镜端装有目镜测微器(图 14.4), 它有两个测微螺旋, 可分别驱动视场内两组相互垂直的动丝网, 在视场内还装有一组定丝网。连接物镜第二主点和定丝网中心的直线 OO' 称为视线。视线 OO' 与水平轴 HH' 应相互垂直。

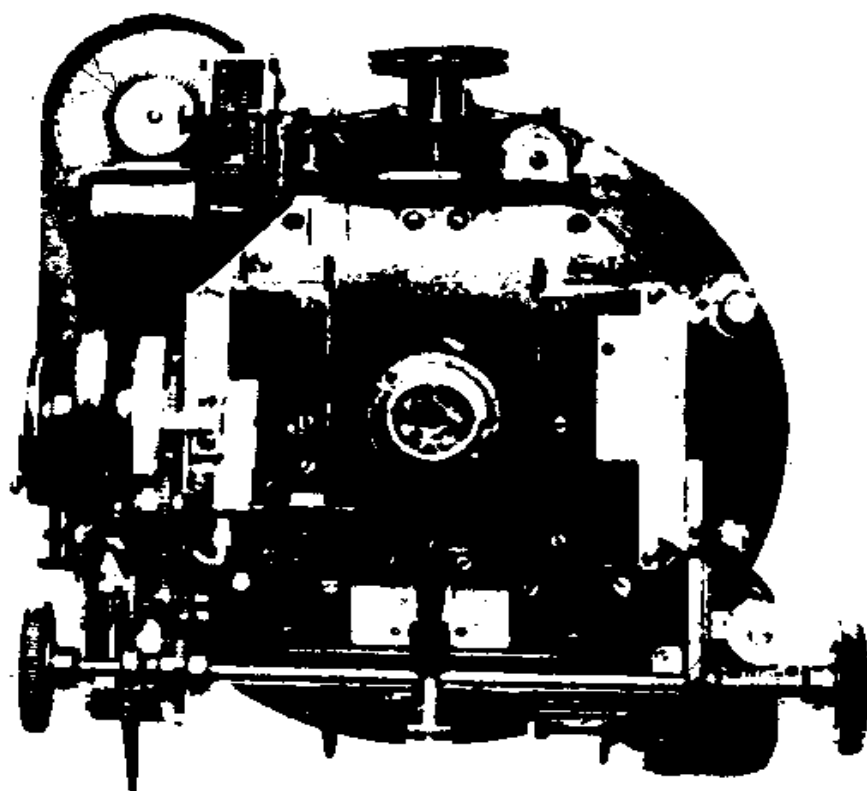


图 14.4 目镜测微器

子午环的垂直度盘一般用金属或玻璃制造, 其直径约为 0.5~1 米, 刻线的最小格值为 $2'$ 或 $5'$ 。最小格值以下的读数, 可用读数显微镜读取。有 4 或 6 个读数显微镜分布均匀地装在特制的鼓形轮上, 而鼓形轮固连在支承子午环的石柱上(参看图 14.2)。

在理想情况下, 当子午环的望远镜绕水平轴旋转时, 视线的延长线应在天球上描绘出天子午圈。这样, 当恒星通过视场内丝网中心时, 天文钟指示的时刻就是恒星中天的瞬间, 而垂直度盘

的读数则是恒星的中天天顶距。

三、子午环的观测方法

测定恒星赤经时，如上所述应记录恒星过子午环视场内垂直丝的时刻。为此除了天文钟所提供的地方恒星时外，尚需记录设备，诸如印字记时仪，电子计数器等。记时精度目前已达到 $\pm 0.005^s \sim \pm 0.010^s$ 。

测定恒星赤纬时，实质上是测定恒星的天顶距。这时应先定出子午环的天底点；即当望远镜指向天底时，垂直度盘上的读数。天底点是利用放置在仪器下面的水银盘来测定的。目前测定天顶距的精度约为 $\pm 0.20''$ 。

四、垂直环和大中星仪

除子午环外，为了测定恒星的赤纬，专门设计了一种用来测定恒星中天天顶距的仪器——垂直环(图 14.5)，它与子午环的不同在于整个仪器的上部可绕垂直轴旋转，在观测某颗星的中途(即该星中天之前)可将仪器旋转 180° 。这样一来，恒星的天顶距可通过两个仪器位置的度盘读数组合求出，而不必用水银盘来定天底点。

另外，专用来测定恒星赤经的仪器称为大中星仪，因它只用来测定恒星的中天时刻，故没有装置精密的垂直度盘。

垂直环和大中星仪只在少数天文台使用，不如子午环那样用途较广泛。

五、子午仪器的改进

自从第一架子午仪器在 1689 年由丹麦天文学家罗默制成后，子午仪器不断完善，到十九世纪已基本定型，二十世纪初开始在

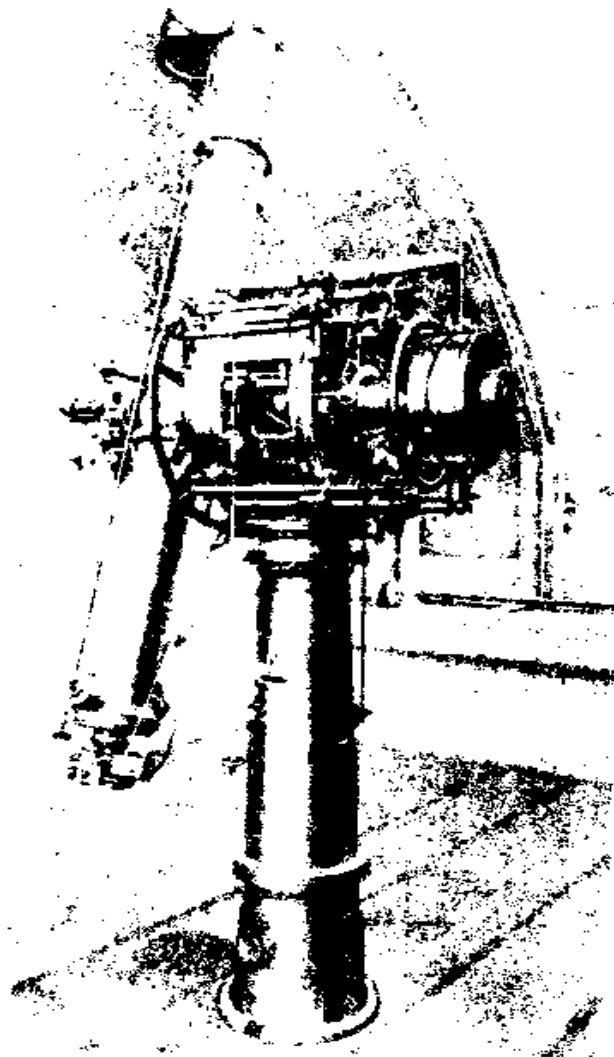


图 11.5 子午环

世界各天文台广泛流行。

随着自动化技术和电子计算机的应用,从本世纪 60 年代后期起,不少天文台开展了半自动化或全自动化子午环的研制。结果,新型子午环提高了观测的极限星等,减少了观测误差,同时也使天文学家从异常繁重的子午观测工作中解脱出来。例如,70 年代初期出现的半自动化子午环只要两个人就能胜任整夜的观测工作。目前,全世界大约有 7~8 架自动化子午环已投入观测。

与子午环自动化的同时,还在改进仪器结构上进行了探索,例如苏联普尔科沃天文台研制了水平式子午环。最近,丹麦天文学家霍格(E. Høgg)设计了一种新颖的玻璃水平子午环,目前正在试制中。

§ 14.2 子午天体测量仪器的误差及其影响

一、子午仪器的主要误差

一架理想的子午仪器,应满足下列三个条件:

- (1) 水平轴指向正东和正西;
- (2) 水平轴位于水平面内;
- (3) 视线垂直于水平轴。

在这种理想情况下,可利用图 14.1 来说明子午观测的原理。

实际上,没有误差的仪器是不存在的。当水平轴偏离东西方向,且不在水平面内时,仪器水平轴的延长线将交于天球上的 W' 点, W' 距西点 W 甚近。画出 W 点附近的一小部分天球图,并视为平面(如图 14.6 所示)。在图 14.6 中, WS 表示地平圈方向, WZ 表示卯酉圈方向, WQ 表示赤道方向, WP 表示赤经圈方向。显然, $W'D=i$ 就是水平轴相对于水平面的倾角,称为子午仪器的水平差,并定义水平轴西端偏高时, $i>0$ (图 14.6 的情况)。而 $WD=k$ 即水平轴与东西方向的夹角,称为方位差,规定水平轴西端偏南时, $k>0$ 。

由图 14.6 易于看出, k 和 i 可视为 W' 点在地平坐标系中的两个坐标;同时,用 m 和 n 来表示 W' 点在赤道坐标系中的两个坐标,如图 14.6 所示。

还有一个仪器误差是由于视线与水平轴不垂直而产生的,称

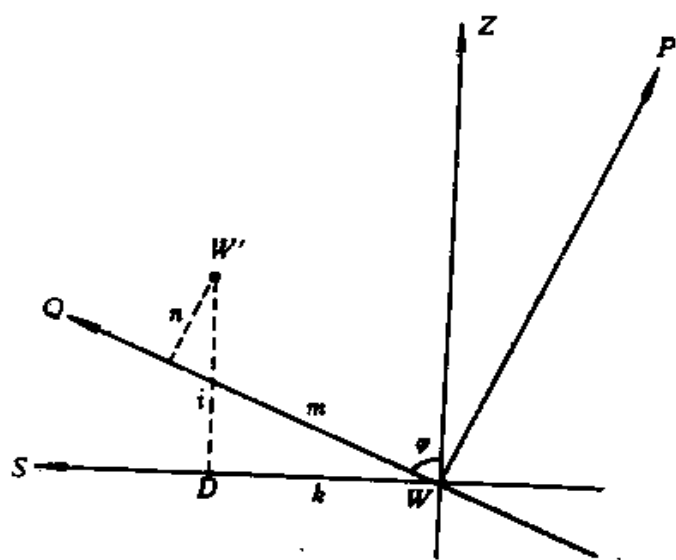


图 14.6 子午仪器的误差

为准直差。规定当视线方向与东西方向的夹角大于 90° 时，准直差 c 取正值，此时望远镜的物镜端偏东。

水平差、方位差和准直差是影响观测结果的三项主要误差。在实际工作中，它们的大小可调整到 $1'$ 以内，亦即均可视为小量，而图 14.6 所画出的西点附近的部分天球就可作为平面来处理。

二、水平差、方位差和准直差对观测结果的影响

1. $i=k=0$, 准直差 $c>0$ 这时如图 14.7 所示，视线在天球上将描绘出一个平行于天子午圈的小圆（在图中用虚线表示）。对于一颗上中天的恒星 σ 来说，先经过此小圆然后才过子午圈（参看图 14.7），因此如果观测时刻为 T ，那么应加上改正值 ΔT_c 才能得出恒星的中天时刻 $T + \Delta T_c$ 。由图 14.7 中的三角形 σPM 有： $\angle \sigma PM = \Delta T_c$, $\sigma M = c$, $\sigma P = 90^\circ - \delta$, 于是

$$\sin \sigma M = \sin \sigma P \sin \Delta T_c,$$

$$\sin c = \cos \delta \sin \Delta T_c.$$

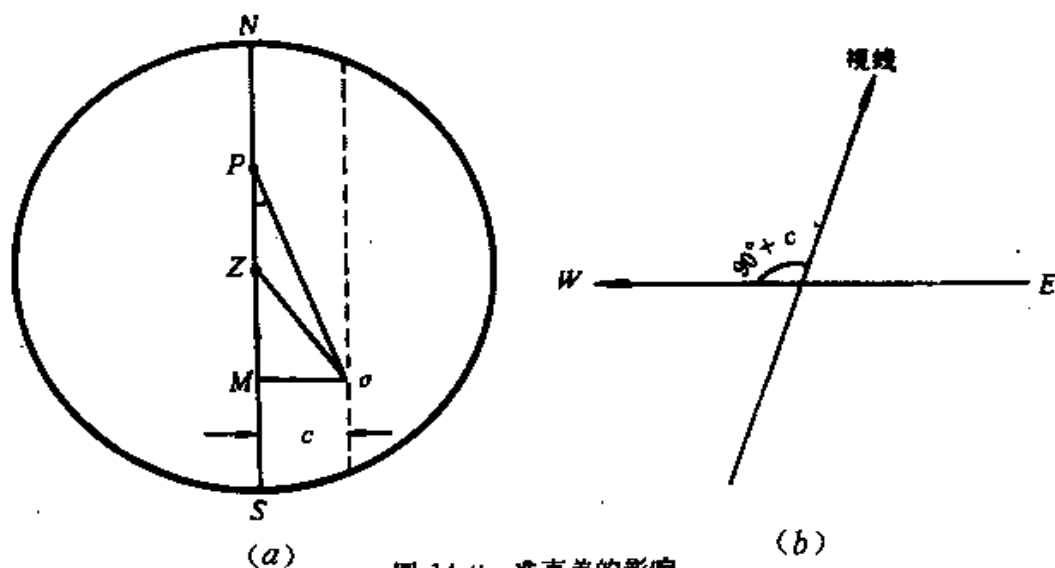


图 14.7 准直差的影响

式中 c 和 ΔT_c 皆为小量, 若只保留一阶项, 则得

$$\Delta T_c = c \sec \delta. \quad (14.5)$$

如果观测下中天的恒星, 那么过视场中丝(对应于天球上的小圆)的时刻要比过子午圈晚, 这时

$$\Delta T_c = -c \sec \delta. \quad (14.6)$$

2. $c=k=0$, 水平差 $i>0$ 这时如图 14.8 所示, 视线在天球上描绘出来的是一个与天子午圈相交于南北两点的大圆, 其夹角为 i 。显然, 对恒星中天时刻的影响与准直差的情况类似。利用图 14.8 的三角形 σPM 和 σSM 可得

$$\sin \sigma M = \sin \sigma P \sin \Delta T_i,$$

$$\sin \sigma M = \sin \sigma S \sin i.$$

式中 $\Delta T_i = \angle \sigma PM$, $\sigma S = 90^\circ - z_m$, 这里 $z_m = \varphi - \delta$ 是恒星的中天天顶距。精确到一阶小量时, 可得

$$\Delta T_i = i \cos z_m \sec \delta. \quad (14.7)$$

对于下中天的恒星, 据(14.4)式有

$$\Delta T_i = i \cos(\varphi + \delta) \sec \delta. \quad (14.8)$$

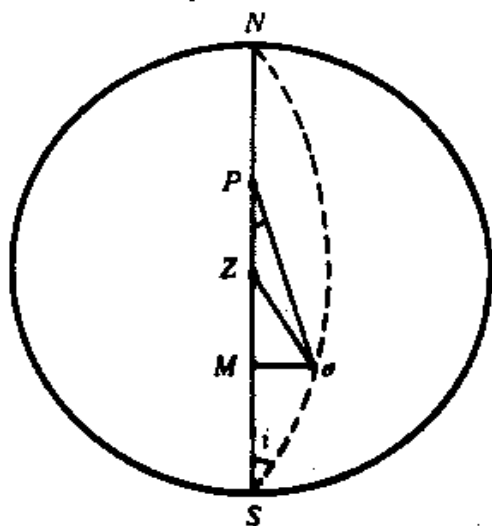


图 14.8 水平差的影响

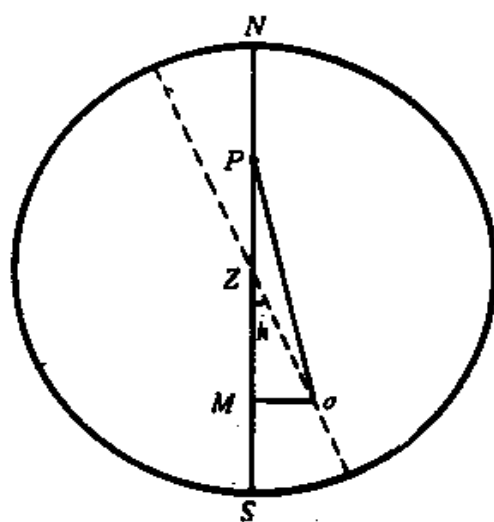


图 14.9 方位差的影响

3. $i=c=0$, 方位差 $k>0$ 这时如图 14.9 所示, 视线在天球上描绘出一个地平经圈, 它与天子午圈的夹角为 k 。当观测天顶以南上中天的恒星以及下中天的恒星时, 恒星先过视场中丝, 后经天子午圈; 而观测天顶以北上中天的恒星时, 情况恰好相反。仿照前面的讨论, 利用图 14.9 中的三角形 σPM 和 σZM , 在准确到一阶小量的情况下, 对于上、下中天观测分别有:

$$\Delta T_k = k \sin z_m \sec \delta, \quad (14.9)$$

$$\Delta T_k = k \sin(\varphi + \delta) \sec \delta. \quad (14.10)$$

进一步的分析表明, 准确到一阶小量时, i , c , k 对中天天顶距的测定结果没有影响。

三、梅耶(J. T. Mayer)公式和贝塞耳公式

上面逐一讨论了三种误差分别对中天时刻的影响, 一般可以认为总的影响就是 ΔT_c , ΔT_i 和 ΔT_k 之和。合并(14.5)、(14.7)和(14.9)式, 可得上中天恒星中天时刻 T_m 的公式为

$$T_m = T + c \sec \delta + i \cos(\varphi - \delta) \sec \delta + k \sin(\varphi - \delta) \sec \delta, \quad (14.11)$$

而下中天恒星的公式相应为

$$T_m = T - c \sec \delta + i \cos(\varphi + \delta) \sec \delta + k \sin(\varphi + \delta) \sec \delta. \quad (14.12)$$

将(14.11)和(14.12)式分别代入(14.1)和(14.3)式中, 可得梅耶公式如下:

$$\alpha = T + u + c \sec \delta + i \cos(\varphi - \delta) \sec \delta + k \sin(\varphi - \delta) \sec \delta. \quad (14.13)$$

$$\alpha = T + 12^h + u - c \sec \delta + i \cos(\varphi + \delta) \sec \delta + k \sin(\varphi + \delta) \sec \delta. \quad (14.14)$$

(14.13)式适用于上中天观测, 而(14.14)式用于下中天观测。

参照图 14.6, 将 W' 点的地平坐标 k 和 i 转化为赤道坐标 m 和 n 。显然, 这两组坐标轴间的夹角就是观测地点的纬度 φ , 利用坐标系旋转关系式, 有

$$\begin{cases} i = m \cos \varphi + n \sin \varphi, \\ k = m \sin \varphi - n \cos \varphi. \end{cases}$$

可将梅耶公式化为贝塞耳公式:

$$\alpha = T + u + m + c \sec \delta + n \operatorname{tg} \delta. \quad (\text{上中天}) \quad (14.15)$$

$$\alpha = T + 12^h + u + m - c \sec \delta - n \operatorname{tg} \delta. \quad (\text{下中天}) \quad (14.16)$$

四、其他仪器误差的影响

除 i , k , c 以外, 对观测结果有影响的仪器误差还有: 轴颈不规则性, 镜筒弯曲, 以及度盘格值误差等。这些误差难以用分析方法作出定量讨论, 下面对它们的影响作一些定性说明。

轴颈的不规则性将使 i 和 k 产生不规则变化, 从而影响到中天时刻的测定值。目前, 尽管仪器精密加工的准确度已很高, 但

仍需研究由于磨损所可能造成的不规则变化。

镜筒弯曲是一种很难避免的误差，显然它与重力有关，并将对中天顶距的测定有影响。水平子午环的设计就是为了消除这一仪器误差。

度盘格值误差就是垂直度盘上每根刻线的误差，直接影响中天顶距的测定。目前都是利用电子计算机求解出每根刻线的改正数，以便用来改正天顶距的测定值。经这样改正后，现代子午环的读数精度已可达 $\pm 0.1''$ 。

§ 14.3 测定恒星赤道坐标的目视方法

通过子午观测来测定恒星的 α 和 δ ，有绝对测定和相对测定两种方法。当进行恒星位置的绝对测定时，不能利用已知的恒星位置等观测数据，所有数据均需独立进行测定。绝对测定的精度一般较高，但观测程序繁杂，只能观测少数较亮的恒星。恒星位置的相对测定也称较差测定，是将大量待测位置的恒星与少数已用绝对测定方法定出位置的恒星进行联合观测，测出两者的位置差，然后根据已知的星位就可推算出待测星的位置。相对测定方法适用于大量恒星的观测，但其精度不如绝对测定方法高。

一、恒星位置的绝对测定

1. 赤纬的绝对测定 首先通过拱极星上、下中天观测确定观测地点的纬度 φ 。设 $\zeta_{\text{上}}$ 和 $\zeta_{\text{下}}$ 分别为某拱极星上、下中天的视天顶距， $\rho_{\text{上}}$ 和 $\rho_{\text{下}}$ 为相应的大气折射改正， $z_{\text{上}}$ 和 $z_{\text{下}}$ 为真天顶距。则有

$$\begin{aligned} z_{\text{上}} &= \zeta_{\text{上}} + \rho_{\text{上}} = \delta - \varphi, \\ z_{\text{下}} &= \zeta_{\text{下}} + \rho_{\text{下}} = 180^\circ - \delta - \varphi. \end{aligned}$$

两式相加可得

$$\varphi = 90^\circ - \frac{1}{2}(\zeta_{\perp} + \zeta_{\text{F}}) - \frac{1}{2}(\rho_{\perp} + \rho_{\text{F}}). \quad (14.17)$$

一般来说, 由大气折射改正表查出的 $\rho_{\perp}$ 和 ρ_{F} 与实际观测情况并不完全相符; 另外, 由于纬度变化的存在, 观测地点平均纬度 φ_0 也需加一改正量 $\Delta\varphi$ 。在此情况下, 利用

$$\rho = R \operatorname{tg} z,$$

式中 R 为大气折射常数。可写出

$$\Delta\rho = \Delta R \operatorname{tg} z.$$

于是, 对某一颗拱极星的上、下中天观测可写出下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (\varphi_0 + \Delta\varphi) + (z_{\perp} + \Delta R \operatorname{tg} z_{\perp}), \\ \delta &= 180^\circ - (\varphi_0 + \Delta\varphi) - (z_{\text{F}} + \Delta R \operatorname{tg} z_{\text{F}}). \end{aligned} \right\} \quad (14.18)$$

在(14.18)式中, δ , $\Delta\varphi$, ΔR 为待求量。如果再观测一颗拱极星, 就可列出含有 4 个未知数 δ_1 , δ_2 , $\Delta\varphi$, ΔR 的 4 个观测方程, 求解后可得 $\Delta\varphi$ 和 ΔR 。已知 $\Delta\varphi$ 和 ΔR 后, 利用(14.18)式推算其他恒星的绝对赤纬就不成问题了。

2. 赤经的绝对测定 由梅耶公式(14.13)可知, T 为观测量, 如能独立地确定仪器误差 i , c , k 以及钟差 u 的数值, 测定 α 的问题就解决了。

i 和 c 是用实验室方法测定的, 可独立于天文观测进行。 k 能够利用北极星的上、下中天两次观测来确定, 计算公式如下:

$$k = \frac{(T_2 - T_1) \cos \delta}{\sin(\delta - \varphi) - \sin(\delta + \varphi)} \quad (14.19)$$

式中 T_2 和 T_1 分别为已改正了 i 和 c 影响的下中天时刻和上中天时刻, 它们都是观测量。

至于天文钟的钟差 u 可通过收录无线电时号(参看 § 15.4)求得, 无线电时号的精度能保证绝对测定的精度要求, 这样定出的

u 并不违背绝对测定的原则。

最后, 绝对测定 α 的观测方程可写为:

$$\alpha_i = T_i + u_0. \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14.20)$$

式中 u_0 为某一给定时刻 T_0 的钟差, 为待求量。如果观测 n 颗恒星, 可列出 n 个方程, 但未知量共有 $n+1$ 个。为此, 尚需通过太阳的子午观测来确定 u_0 。

绝对测定太阳赤经的原理如图 14.10 所示。 γ 为春分点, ϵ 为黄赤交角。假定用子午环对太阳进行两次绝对测定, 测出赤纬 $\delta_1^\odot$ 和 $\delta_2^\odot$, 中天观测时刻分别为 T_1 和 T_2 , 那么可列出两个观测方程:

$$\left. \begin{aligned} \sin(T_1 + u_0) \operatorname{tg} \epsilon &= \operatorname{tg} \delta_1^\odot, \\ \sin(T_2 + u_0) \operatorname{tg} \epsilon &= \operatorname{tg} \delta_2^\odot. \end{aligned} \right\} \quad (14.21)$$

求解(14.21)式, 可得 u_0 和 ϵ 。已知 u_0 , 利用(14.20)式就可求出其他恒星的赤经了。

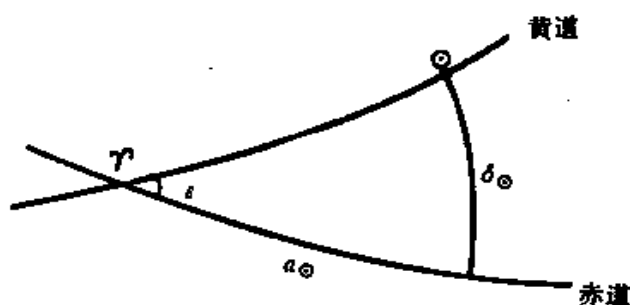


图 14.10 太阳赤经的绝对测定

二、恒星位置的相对测定

1. 赤纬的相对测定 利用已知位置的恒星(常称为定标星), 可定出当视线指向天赤道时, 子午环垂直度盘的读数 M_0 ——赤道点。显然有

$$M_0 = M_s - \delta_s. \quad (14.22)$$

式中 M_s 为定标星的度盘读数, δ_s 为该定标星的赤纬。

然后, 对待测星进行中天观测, 读取度盘读数 M , 则该待测星的相对赤纬等于

$$\delta = M - M_0. \quad (14.23)$$

2. 赤经的相对测定 利用贝塞耳公式(14.15), 观测两颗定标星(一颗拱极星, 一颗赤道星), 假定准直差 c 用实验室方法测出并已在中天时刻中加以改正。这时有

$$\alpha_1 = T_1 + (u + m) + n \operatorname{tg} \delta_1,$$

$$\alpha_2 = T_2 + (u + m) + n \operatorname{tg} \delta_2.$$

两式相减可得

$$n = \frac{(\alpha_2 - T_2) - (\alpha_1 - T_1)}{\operatorname{tg} \delta_2 - \operatorname{tg} \delta_1}. \quad (14.24)$$

利用其他定标星的观测结果, 可求出:

$$(u + m)_i = \alpha_i - T_i - n \operatorname{tg} \delta_i. \quad (14.25)$$

取一个夜晚所有 $(u + m)_i$ 值的平均 $(u + m)$ 作为采用值。

已知 n 和 $(u + m)$ 后, 通过待测星的中天观测, 按贝塞耳公式就可求得待测星的相对赤经了。

§ 14.4 照相天体测量学的原理和方法

照相术发明后, 很快就被用来拍摄天体。1850 年曾用美国哈佛大学天文台的折射望远镜(口径 25 厘米)拍到了第一张恒星的照片; 1880 年左右已开始用照相方法来测定天体的位置。

用照相方法测定天体的位置具有许多优点: 可以拍摄到较暗弱的恒星; 在一张底片上可同时拍摄下数量较多的恒星; 拍摄到的底片可长期保存和反复测量。照相方法的局限性在于, 每张底片只能拍摄到天球的很小一部分, 因此只能得到各天体间的相对

位置，也就是说，照相定位是一种相对测定。尽管如此，十九世纪末期随着天体照相技术的不断完善，形成了天体测量学的一个新分支——照相天体测量学，其研究课题包括测定恒星、星团、星云以及太阳系天体的相对位置，测定恒星的相对自行和三角视差，测定双星的轨道等等。

在本节内不可能涉及照相天体测量学的所有领域，而只准备介绍有关恒星照相定位的一些入门知识。

一、天体照相机

用来拍摄天体的望远镜就是 § 3.2 所介绍过的赤道仪，专门从事照相天体测量工作的赤道仪称为天体照相机。早期的天体照相机绝大多数都是折射望远镜，望远镜的一端是物镜，另一端是底片盒。为了在底片上精确测定恒星的相对位置，物镜的焦距较长，因此望远镜的镜筒也较长。

在天体照相仪的主镜筒上平行安装着一个目视望远镜，其口径和焦距均与照相望远镜相近。这个目视望远镜称为导星镜，在曝光期间，观测者通过导星镜的目镜，将预先选定的某些星像调整到视场内指定位置上（视场内装有丝网），观测过程中如发现偏移，观测者可利用赤道仪的驱动装置及时调节望远镜的方向，以保证拍到明晰的星像。

近年来由于拍摄更暗弱天体的需要，越来越多的口径超过一米的反射望远镜开始用于天体测量工作。而目视导星方法逐渐为光电自动导星技术所取代。

二、底片比例尺

反映一架天体照相机性能的是焦距 F 和相对口径 D/F (D 为物镜的口径)。通常，根据 F 和 D/F 的不同，可将天体照相

仪分为两大类。

长焦距天体照相仪的相对口径为 $1:15 \sim 1:20$ ，焦距为 $5 \sim 10$ 米；底片视场 $2^\circ \times 2^\circ \sim 1^\circ \times 1^\circ$ 。长焦距天体照相仪主要用于测定恒星的三角视差和自行，也用于研究双星的轨道和运动。

广角天体照相仪的相对口径为 $1:4 \sim 1:10$ ，焦距为 $2 \sim 3$ 米；底片视场 $10^\circ \times 10^\circ \sim 5^\circ \times 5^\circ$ 。广角天体照相仪主要用于测定恒星的位置和自行，也可用于行星、小行星和月球的精确定位。

近年来专用于人造卫星照相观测的人卫照相机，一般使用强光力的折反射望远镜，其口径为 $10 \sim 50$ 厘米，焦距为 $30 \sim 100$ 厘米。

天体照相仪的焦距 F 决定了底片中央部分的线距离 s 与天球上角距离 σ 间的关系(参看图 14.11)：

$$s = F \operatorname{tg} \sigma \quad (14.26)$$

如令 $s = 1 \text{ m. m.}$ ，则可得出底片上每毫米相当于天球上的角秒数 m'' ，常称为底片比例尺：

$$m'' \approx \frac{1}{F} 206265'', \quad (14.27)$$

式中焦距 F 以毫米为单位。

三、理想坐标与赤道坐标

天体照相仪拍摄的底片经过显影和定影处理后，需放在专用的坐标量度仪上进行量度，量出各星像相对于底片上某一直角坐标系的坐标 (x, y) ——量度坐标。早期的目视坐标量度仪的测量精度为 ± 1 微米，对于焦距为 2 米左右的天体照相仪，定位精度平均可达 $\pm 0.15''$ 。利用现代的自动化坐标量度仪，测量精度可提高 $2 \sim 3$ 倍。

如何将各星像的量度坐标 (x, y) 化为恒星的赤道坐标 (α, δ) 呢？这需要在底片上建立一个理想坐标系作为过渡。

理想坐标系是在底片上定义的一种直角坐标系。在图 14.11

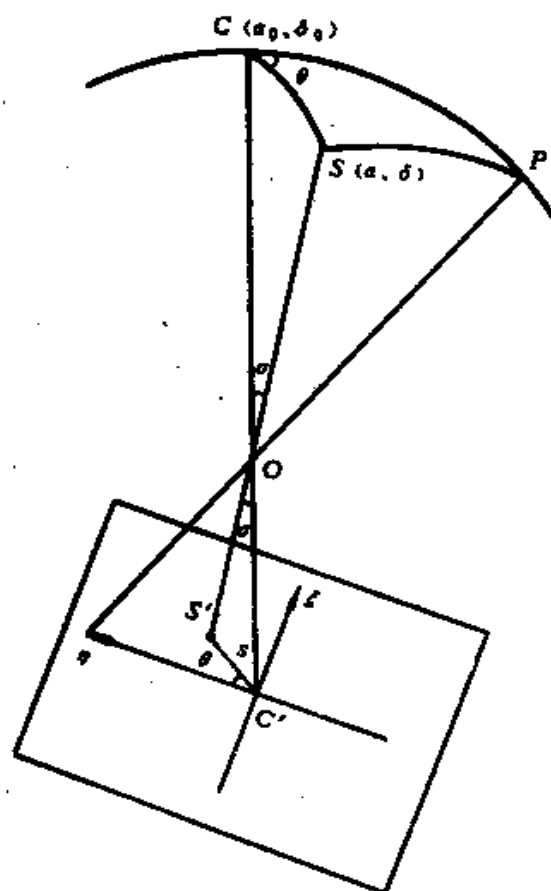


图 14.11 理想坐标与赤道坐标的关系

恒星的赤道坐标 (α, δ) 是一一对应的。

在图 14.11 中, $OC' = F$, $C'S' = s$, 有

$$s = F \tan \sigma.$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \xi &= F \tan \sigma \sin \theta, \\ \eta &= F \tan \sigma \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (14.28)$$

取 $F = 1$, 即用弧度来表示 (ξ, η) , 则有

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \tan \sigma \sin \theta, \\ \eta &= \tan \sigma \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (14.29)$$

中, S 为天球上的一颗恒星, 它在底片上成像于 S' 点。 O 表示物镜的主点, 自 O 点作底片的垂线交底片于 C' 点, C' 点称为底片的光心。假定在天球上与光心 C' 相对应的点 C 的赤道坐标为 (α_0, δ_0) 。

在底片上以光心 C' 为原点建立一个直角坐标系。纵轴 η 为赤经圈 PC 的投影, 取赤纬增加的方向为正向; 横轴 ξ 垂直于 η 轴, 取赤经增加的方向为正向。 $C'-\xi\eta$ 就称为理想坐标系。星像 S' 在此坐标系中的坐标 (ξ, η) 称为理想坐标。显然, (ξ, η) 与

对球面三角形 PCS 利用球面三角的基本公式, 容易得出:

$$\left. \begin{aligned} \cos \sigma &= \sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0), \\ \sin \sigma \sin \theta &= \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_0), \\ \sin \sigma \cos \theta &= \sin \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \sin \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0). \end{aligned} \right\} \quad (14.30)$$

合并(14.29)和(14.30)式, 可得:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\operatorname{ctg} \delta \sin (\alpha - \alpha_0)}{\sin \delta_0 + \operatorname{ctg} \delta \cos \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0)}, \\ \eta &= \frac{\cos \delta_0 - \operatorname{ctg} \delta \sin \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0)}{\sin \delta_0 + \operatorname{ctg} \delta \cos \delta_0 \cos (\alpha - \alpha_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (14.31)$$

利用(14.31)式就可将恒星的赤道坐标化为理想坐标。

反过来, 由理想坐标计算赤道坐标的公式为

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} (\alpha - \alpha_0) &= \frac{\xi \sec \delta_0}{1 - \eta \operatorname{tg} \delta_0}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{\eta + \operatorname{tg} \delta_0}{1 - \eta \operatorname{tg} \delta_0} \cos (\alpha - \alpha_0). \end{aligned} \right\} \quad (14.32)$$

四、理想坐标与量度坐标

量度底片时, 尽管可通过调整底片在量度仪上的取向, 使 x 轴和 y 轴分别平行于赤纬圈和赤经圈, 但无法保证两者完全重合, 这样一来, 某个星像的理想坐标和量度坐标就不会相同。产生这种差别的原因可归纳如下:

- (1) 两个坐标系的原点不重合;
 - (2) x 轴和 y 轴不正交;
 - (3) x 轴与 ξ 轴, y 轴与 η 轴互不平行;
 - (4) 量度仪的 x 和 y 刻度尺的比例不同;
 - (5) 量度坐标受到较差大气折射和较差光行差的影响。
- 在此情况下, 理想坐标和量度坐标之间可用下列形式的数学

关系式表示:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= ax + by + c, \\ \eta &= dx + ey + f. \end{aligned} \right\} \quad (14.33)$$

上式常称为特纳(H. H. Turner)公式, 式中 a, b, c, d, e, f 称为底片常数。

五、求解恒星赤道坐标的步骤

照相观测时, 一般将待测星置于底片光心附近, 选取 8~12 颗围绕被测目标且分布较均匀的恒星作为定标星。如果一张底片上有多颗待测星, 那么所选取的定标星应在整个视场内均匀分布, 最好有 25~40 颗。

获得待测星赤道坐标的步骤如下:

(1) 选定光心的赤道坐标 (α_0, δ_0) (可利用光心附近的定标星的赤道坐标估算出来), 按 (14.31) 式将所有定标星的赤道坐标 (α_R, δ_R) 化为理想坐标 (ξ_R, η_R) 。

(2) 通过量度底片, 分别得到定标星和待测星的量度坐标 (x_R, y_R) 和 (x, y) 。

(3) 将各定标星的 (ξ_R, η_R) 和 (x_R, y_R) 代入数学模型 (14.33) 式, 利用最小二乘法求解出底片常数。

(4) 利用所得到的底片常数和待测星的 (x, y) , 再代入 (14.33) 式的右端, 就可算出待测星的理想坐标 (ξ, η) 。

(5) 最后可用 (14.32) 式将待测星的 (ξ, η) 化为赤道坐标 (α, δ) 。

§ 14.5 恒星自行的测定

一、恒星的自行及其测定

关于恒星自行的定义以及一般描述在 § 10.1 和 § 11.2 中已

讲过了，本节将介绍测定恒星自行的方法。

虽然早在十八世纪初期已发现了恒星的自行，但是差不多过了一个世纪第一批恒星的自行才被测定出来，这是由于自行大于 $0.1''$ /年的恒星已属罕见。据统计全天球肉眼可看到的恒星中自行 $\geq 1''$ /年的只有 48 颗，自行最大的恒星是巴纳德星（在蛇夫座内，视星等为 9.7^m ），达 $10.31''$ /年。

原则上，只要在两个不同的历元 t_1 和 t_2 ，绝对测定星位 α_1 和 α_2 （或 δ_1 和 δ_2 ），扣除这段时间内岁差的影响后，就可求出自行的赤经分量 μ_α （或赤纬分量 μ_δ ）：

$$\mu_\alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} \quad (14.34)$$

一般 $(t_2 - t_1)$ 需 50~100 年，才能较精确地测定自行。往往不可能在同一架仪器上进行两个历元的观测，这样势必在观测结果中带来无法消除的误差。同时，目视方法只能观测到亮于 9^m 的恒星，更暗弱恒星的自行要用照相方法来测定。

二、用照相方法测定恒星的相对自行

照相方法特别适宜于大量测定恒星的自行，为了提高测定自行的精度，应选用长焦距天体照相机。一般说，当天体照相仪的焦距为 5 米时，前后两期底片的时间间隔可取为 30 年左右。

对需要测定自行的同一天区，在相隔 20~40 年的两个不同历元拍照两次，并应在尽可能类似的条件下进行，最好使用同一架天体照相机，相同型号的底片，相等的曝光时间，同样的仪器位置，以及相近的观测日期（指两个不同的年份，但某月和某日尽量接近）。这样获得的两期底片上同一星像位置的差异，可以认为是由恒星自行以及两张底片的量度坐标系不同而引起的。

两期底片可以分别在坐标量度仪上测量，也可在专用的量度

仪上进行同时测量。如果用一架专用量度仪同时量度两期底片，那么可直接得到同一颗星像在两期底片上的量度坐标差 $\Delta x, \Delta y$ 。仿照特纳公式，可将 $\Delta x, \Delta y$ 表为

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= ax + by + c + \mu_x(t_2 - t_1), \\ \Delta y &= dx + ey + f + \mu_y(t_2 - t_1). \end{aligned} \right\} \quad (14.35)$$

式中 a, b, c, d, e, f 称为联系常数，它们反映了两张底片的量度坐标系之间的关系； μ_x 和 μ_y 为恒星自行在其中一张底片的量度坐标系中的分量； x 和 y 为星像在该量度坐标系中的量度坐标，可在得到 Δx 和 Δy 的同时用量度仪量出。

在底片上选取 15~25 颗均匀分布的暗星作为比较星，它们的自行为已知量。更一般的情况是尽量选取暗弱的比较星，并假定它们的自行为零。这时，对于比较星而言，(14.35) 式中的 μ_x 和 μ_y 两项可略去。利用最小二乘法求解出 6 个联系常数以后，待测星的自行分量就可按下式来计算：

$$\left. \begin{aligned} \mu_x &= \frac{1}{t_2 - t_1} (\Delta x - ax - by - c) m_x, \\ \mu_y &= \frac{1}{t_2 - t_1} (\Delta y - dx - ey - f) m_y. \end{aligned} \right\} \quad (14.36)$$

式中 m_x 和 m_y 分别为 x 轴和 y 轴方向的底片比例尺。(14.36) 式中的 μ_x 和 μ_y 以角秒/年为单位。

由于恒星的自行很小，量度底片时，只要使量度坐标系尽可能与理想坐标系重合，就可认为

$$\left. \begin{aligned} \mu_x &= 15 \mu_\alpha \cos \delta, \\ \mu_y &= \mu_\delta. \end{aligned} \right\} \quad (14.37)$$

上式中的 μ_α 为自行的赤经分量，习惯上以时秒/年为单位； μ_δ 为赤纬分量，以角秒/年为单位。

最后，按下式计算自行的两个分量

$$\left. \begin{aligned} \mu_\alpha \cos \delta &= \frac{1}{15} \frac{\Delta x - (ax + by + c)m_x}{t_2 - t_1}, \\ \mu_\delta &= \frac{\Delta y - (dx + ey + f)m_y}{t_2 - t_1}. \end{aligned} \right\} \quad (14.38)$$

由上面的讨论可知, 这样求出的待测星的自行是相对于一组比较星而言的, 故称为相对自行。

通过近二百年的积累, 大约有 30 万颗恒星已测定出了自行。照相测定自行的精度平均可达 $\pm 0.01''/\text{年} \sim \pm 0.03''/\text{年}$, 最好的可达到 $\pm 0.003''/\text{年}$ 。

三、恒星自行的绝对定标

本世纪 40 年代末期, 开始通过河外星系的照相观测来测定恒



图 14.12 利克天文台的天体照相机

星相对于河外星系的绝对自行。由于河外星系极其遥远，它的自行小于 $0.0001''/\text{年}$ ，因此可当作天球上不动的定标点。遗憾的是，可资观测的河外星系大部分为 $14^m \sim 17^m$ ，难以直接与亮星（指亮于 9^m 的恒星）联合观测，一般都是先定出 12^m 的恒星相对于 16^m 的星系的自行，然后照相测定 12^m 恒星与 8^m 恒星间的相对运动。只要将两者相加就可得出 8^m 恒星的绝对自行。

美国的利克天文台利用 50.8 厘米的双筒天体照相机（图 14.12），通过近 25 年（1947 年～1971 年）的努力已完成了北天区约 9 千颗恒星绝对自行的测定，现正向南天恒星扩展。

苏联也有类似的测定恒星绝对自行的计划，由普尔科沃天文台主持进行。第一期底片于 1938 年～1958 年期间拍摄，1963 年开始拍摄第二期底片。1974 年已发表了 14600 颗恒星的绝对自行。

§ 14.6 恒星三角视差的测定

在 § 8.1 中已阐述过恒星三角视差的有关概念，本节将讨论恒星三角视差的照相测定原理。

与照相测定恒星自行类似，需要用长焦距天体照相机对待测视差的恒星（简称为视差星）拍照，一般选择视差星的赤经视差位移达到最大时（一年内有二个日期）进行观测。在拍照时将视差星置于底片中心，其周围应有 5～10 颗暗弱的恒星作为比较星。通常，在 2 至 4 年内大约拍摄 15～20 张底片。

从拍好的底片中选出一片质量较好的作为标准底片；并依次量出视差星和比较星在每张底片上的量度坐标。

根据特纳公式求出每张底片与标准底片间的联系常数，利用联系常数可将视差星在各张底片上的量度坐标换算到标准底片上

的量度坐标系中。如果用 X_i 表示第 i 张底片经换算后的量度坐标, 以 X_0 表示视差星在标准底片上的量度坐标, 差值 $\Delta X_i = X_i - X_0$ 可以认为是由恒星的周年视差、自行以及测定误差等因素引起的。写出观测方程式:

$$\Delta X_i = \pi \Delta p + \mu_x \Delta t, \quad (14.39)$$

式中 π 为视差, μ_x 为自行, Δt 为第 i 张底片与标准底片的拍摄时间之差, p 称为视差因子(可按球面天文学的公式来计算), Δp 为在 Δt 时间内视差因子之差。

如果量度底片时, 使量度坐标系与理想坐标系基本重合, 那么 $\Delta X_i = \Delta \alpha_i \cos \delta$, $\mu_x = \mu_a \cos \delta$ 。于是, (14.39) 式可改写为

$$\Delta \alpha_i = \pi \Delta p' + \mu_a \Delta t, \quad (14.40)$$

利用最小二乘法求解方程组 (14.40) 式, 可求出三角视差 π , 同时还得到 μ_a 。

不言而喻, 同求相对自行的情况类似, 事先已假定比较星的视差为零, 因此这里得到的视差应是相对视差, 即视差星相对于一组比较星的视差。

照相方法测定视差的精度平均为 $\pm 0.01''$, 也就是说, 只有对于距离太阳在 100 秒差距以内的恒星, 用照相方法测定其三角视差才有效, 对更为遥远的恒星, 用这种方法测定视差将因观测误差太大而得不到可靠的结果。

§ 14.7 基本坐标系的建立

精确测定恒星的位置及其运动, 根本目的是要建立一个统一的天文参考系, 为天文学各领域的研究提供共同的基准, 这个参考系称为基本坐标系。

一、基本坐标系的定义和实现

基本坐标系是指某一标准历元的太阳系质心平赤道坐标系，理论上它可通过岁差旋转换算到任一历元去。

实现基本坐标系的途径是间接的。通常，在全天球上挑选一定数量的均匀分布的恒星（常称为基本星），测定基本星的赤经和赤纬，然后与这些基本星若干年前的赤经和赤纬相比较，可求得基本星的自行。利用基本星的星位和自行等数据，编制出一本星表——基本星表。在基本星表中，列出数千颗基本星在某标准历元的坐标 α 和 δ 以及由于岁差、自行所造成的坐标的变化。利用这些数据就可以在天球上复制出任一历元的平赤道坐标系，为天文学各领域的研究课题提供一个精确的、统一的参考系。

二、初始星表的比较和综合

各个天文台利用若干年内的观测结果编制成的星表，称为初始星表。按照观测方法的不同又可分为绝对星表和相对星表，前者的星位是通过绝对测定方法得到的，而后者则是用相对测定方法得到的。

将不同的初始星表换算到同一个观测历元后，可以发现，同一颗恒星的坐标在不同星表中往往有差异，这反映了在观测结果中既有系统误差，又有随机误差的影响。这些观测误差应通过不同星表的比较来加以削弱。

如果选出两本星表中共同的恒星，就它们的坐标进行比较，那么求出坐标差值后，就可以发现这些差值具有某些规律性，它们依赖于赤经 α ，赤纬 δ 以及星等 m 等，并且各有关项可彼此分离。也就是说，坐标差 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 能写成下列数学模型：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= \Delta\alpha_a + \Delta\alpha_s + \Delta\alpha_m, \\ \Delta\delta &= \Delta\delta_a + \Delta\delta_s. \end{aligned} \right\} \quad (14.41).$$

式中 $\Delta\alpha_a$ 为随赤经不同而变化的赤经系统误差, $\Delta\delta_a$ 为随赤经不同而变化的赤纬系统误差, $\Delta\alpha_m$ 为随星等不同而变化的赤经系统误差, $\Delta\alpha_s$ 和 $\Delta\delta_s$ 分别为随赤纬不同而变化的赤经和赤纬系统误差。通过对实际星表的分析研究, 发现其中数值较大的是 $\Delta\alpha_s$ 和 $\Delta\delta_s$ 两项。

通过初始星表的相互比较, 可把不同星表中的恒星坐标归算到某一个统一的系统中去, 剩下的差异可视为由随机误差所引起。这时, 可以利用数据处理中取加权平均值的方法, 将同一颗恒星的若干个星位综合为星位采用值, 即基本星表中的星位。

与上述综合恒星星位的同时, 还需求出恒星自行的采用值。

实际上, 往往需要综合上百本初始星表的观测数据, 才能编制出一本质量较好的基本星表, 工作量极其繁重。

一本基本星表的有效使用期不超过 25 年。由于自行和岁差常数的误差, 随着时间的推移, 基本星表提供的坐标系网格将越来越坏。为此, 需要用子午环不断测定基本星的星位, 以便进一步提高星位的精度, 还应特别注意提高恒星自行的测定精度。

§.14.8 各类星表系统简介

从公元前四世纪中国的石申编出载有 121 颗恒星的《石氏星经》(已失传)到十九世纪贝塞耳发表第一本基本星表, 历史上许多著名天文学家都为编制星表作出过重要贡献。本节将以介绍位置星表为主, 同时简单列举几种刊载恒星的物理特性(如光谱型、视

向速度等)的著名星表。

一、基本星表

1. 德国系统的基本星表 1879年奥韦斯(A. Auwers)发表了一本北天基本星表,刊有539颗恒星的星位和自行;1883年又编制了一本包含83颗星的南天星表。

经过几次修订以后,1907年《柏林天文年历新基本星表》(简称NFK)出版,其中包含了925颗恒星,它是由大约90本初始星表综合而成的。

1937年出版了NFK的修订本,名为《柏林天文年历第三基本星表》,简称FK₃,包含了全天分布的1535颗恒星,它是在1820~1930年间77本初始星表的基础上编成的。

1963年发表的《第四基本星表》,简称FK₄,是对FK₃的修订,采用了近70本二十世纪编制的绝对星表。FK₄的标准历元为1950.0,使用到1983年底。

1973年国际天文学联合会(IAU)通过一项决议,建议修订FK₄,将亮于9^m的恒星的数量扩展到4500颗左右。新基本星表称为FK₅(标准历元2000.0年),现正在编制中。

2. 美国的GC系统 1910年刘易斯·博斯编制成《6188颗恒星初期总星表》(简称PGC),采用了82本初始星表。

1937年本杰明·博斯(Benjamin Boss)修订并补充PGC,编成了包含星数最多的一本基本星表——《历元1950年33342颗恒星总星表》,简称GC。GC包含了全天所有亮于7^m的恒星,共采用初始星表228本。

3. 美国的N₃₀系统 1952年美国华盛顿海军天文台综合了平均观测历元在1920.0~1950.0年的60多本初始星表,编制成包含5268颗恒星的基本星表,称为N₃₀星表。

二、照相星表

1. 照相天图星表(简称 AC, 法文简称 CdC) 1887 年在巴黎召开了一次国际会议, 决定用照相方法编制一本全天照相星表。计划由大约 20 个天文台分工测定 150 万颗恒星的位置, 包括所有亮于 11^m 的恒星, 某些天区可拍到 13^m , 平均密度为每平方度约 40 颗恒星。这项国际合作计划直到 1963 年才全部完成。

2. 德国天文学会星表 德国天文学会曾根据子午环的相对观测于本世纪 20 年代前编制成一本 AGK₁ 星表。1924 年又开始用照相方法重测 AGK₁, 修订后的星表称为 AGK₂, 从 1951 至 1958 年陆续发表, 共含有 183000 颗恒星。1955 年开始修订 AGK₂, 到 1973 年以磁带形式刊出观测结果, 称为 AGK₃。

3. 耶鲁星表 美国耶鲁大学天文台 1914~1956 年期间, 对赤纬 $-35^\circ \sim +90^\circ$ 的天区进行照相观测, 编制了一本照相星表, 共包含亮于 9^m 的大约 15 万颗恒星。

4. 好望角照相星表(简称 CPC) 这是照相星表在南天的扩展, 复盖了赤纬 $-30^\circ \sim -90^\circ$ 的天区, 包括亮于 10^m 的近 7 万颗恒星。CPC 根据 1931~1955 年期间的观测于 1968 年编制完毕。

三、综合星表

综合星表也是利用初始星表编制而成的, 但它与基本星表不同, 一般是为某种特定用途而编制的。综合星表不单独提供坐标系的网格, 而是利用现有基本星表给出的坐标网格, 通过子午相对测定或照相测定方法扩展恒星数而得到的一种星表。

美国史密松天体物理天文台为适应空间时代的需要, 提供人造卫星照相观测用的定标星, 在 1966 年编制成一本包含 258997 颗星的星表, 简称为 SAO 星表。

SAO 星表可保证在任一天区每一平方度范围内,都有不少于 4 颗星的星位和自行。

SAO 星表附有 152 张星图,可配合星表使用。

四、其他专用星表

1. 德雷伯星表 1918~1924 年美国哈佛大学天文台出版了刊载恒星光谱型的专用星表,称为德雷伯星表,简记为 HD。此后又出版了德雷伯星表补编,简称为 HDE。

HD 刊载了 255300 颗亮于 9.5^m 的恒星的光谱型, HDE 又续载了近两万颗恒星的光谱型。

2. 河外天体星表 1888 年到 1908 年先后出版了《星云星团新总表》(简称 NGC)及其续编(简称 IC),在其中刊出的天体的命名和编号一直沿用至今,表列星云包括银河星云和河外星系。

NGC 刊载了 7840 个天体, IC 包含了 5386 个天体。

3. 恒星三角视差总表 1952 年美国耶鲁大学出版了詹金斯(L. F. Jenkins)编制的《恒星三角视差总表》(简称 GCTSP), 1963 年又出版了补编。

GCTSP 刊载了 5822 颗恒星的三角视差, GCTSP 及其补编共列出 6400 多颗恒星的视差。

4. 恒星视向速度总表 由美国威尔逊山天文台编制, 1953 年出版,刊载了 15107 颗恒星、银河星云和球状星团的视向速度。

另外,尚有变星总表,双星总表,各种类型的射电源表等等刊载天体物理特性的专用星表。

§ 14.9 天文常数系统概述

在前面讨论建立基本坐标系的问题时,已强调过基本坐标系

是一个太阳系质心平赤道坐标系。但是，到目前为止，天体测量观测都是在地球表面进行的，也就是说，直接由观测确定的参考系是以观测站为原点的坐标系(简称为站心坐标系)。为了将站心坐标系转换到地心坐标系，然后到太阳系质心坐标系，就需要知道某些参数(例如地球赤道半径、太阳视差等)的精确值。另一方面，将基本坐标系从标准历元换算到其他历元时，则需要知道准确的岁差常数值。

在描述天体的大小、形状、运动和物理化学状态的许多参数中，一些固定不变的或者只随时间作缓慢变化的参数统称为天文常数。在众多的天文常数中，有些常数相互之间受着物理定律的制约，它们应满足一定的函数关系。因此，不仅要知道天文常数的精确数值，还必须研究它们之间的内在联系，并在测量精度范围内调整其数值，这就是所谓建立天文常数系统的问题。

天文常数系统的建立和基本坐标系的建立一样，也是天体测量学的重要研究领域之一。

一、历史回顾

十九世纪以前，由于天文观测的精度较低，理论也不甚完善，因此建立天文常数系统的问题并不突出。这时，天文学家往往各自为政，在研究工作中自行选定各有关常数的数值。

随着观测精度的提高，在全世界范围内选定一组公认的天文常数就提到日程上来了。为此，1896年在巴黎召开的国际基本恒星会议和1911年举行的国际天文年历会议一致决定，统一采用美国天文学家纽康推荐的一组天文常数。此后又陆续补充了几个常数值，形成了第一个包括14个天文常数的系统，后来被称为纽康天文常数系统。从1896年至1968年共使用了70余年。

严格地说，第一个天文常数系统中的各常数间的相互关系，

并不完全符合建立天文常数系统的概念。

1950年和1963年国际天文学联合会召开了两次以天文常数为专题的学术讨论会，研究了修改旧天文常数系统并建立新天文常数系统的问题。

二、IAU (1964)天文常数系统

在1964年召开的IAU第12届大会上通过了IAU (1964)天文常数系统，并于1968年起采用。

这个系统包括了23个天文常数及一组大行星质量的采用值，按这些常数的来源可分为三类：定义常数、基础常数和导出常数。

定义常数是硬性规定不能作任何修正的常数，例如高斯引力常数，一经定义后便固定不变。在IAU (1964)天文常数系统中有两个定义常数。

基础常数是由观测得到的最佳值，IAU (1964)天文常数系统中有10个，例如黄经总岁差，章动常数以及黄赤交角等。

导出常数是根据定义常数和基础常数按相应的数学关系式推导出来的，IAU (1964)天文常数系统中共有11个，例如太阳视差，光行差常数以及地球扁率等。

这个新天文常数系统中常数的数值比纽康系统的精确，各常数间也较一致。但由于保留了纽康系统中的黄经总岁差、黄赤交角和章动常数，仍然不够理想。IAU (1964)天文常数系统使用到1983年底。

三、IAU (1976, 1980)天文常数系统

1976年召开的IAU第16届大会通过了目前正在使用的天文常数系统。会后又对其中的章动常数做了修订，采用了IAU

(1980)章动序列。

这个天文常数系统包括 19 个天文常数以及一组大行星质量采用值, 参看表 14.1。

表 14.1 IAU (1976, 1980) 天文常数系统

No.	常 数 名 称	符 号	采 用 值	
(一) 定 义 常 数				
1	高斯引力常数	k	0.01720209895	
(二) 基 础 常 数				
2	光速	c	299792458 米/秒	
3	每天文单位的光行时	τ_A	499.004782 秒	
4	地球赤道半径	a_e	6378140 米	
5	地球动力学形状系数	J_2	0.00108263	
6	地心引力常数	GE	3.986005×10^{14} 米 ³ /秒 ²	
7	引力常数	G	6.672×10^{-11} 米 ³ /千克·秒 ²	
8	月地质量比	μ	0.01230002	
9	黄经总岁差(J2000.0)	p	5029.0966"	
10	黄赤交角(J2000.0)	ε	23°26'21.448"	
(三) 导 出 常 数				
11	章动常数(J2000.0)	N	9.2025"	
12	天文单位	$A = c\tau_A$	$1.49597870 \times 10^{11}$ 米	
13	太阳视差	$\pi_s = \arcsin(a_e/A)$	8.794148"	
14	光行差常数(J2000.0)	κ	20.49552"	
15	地球扁率	f	$0.00335281 \pm 1.298.257$	
16	日心引力常数	$GS = A^3 k^2 / D^2$	$1.32712438 \times 10^{20}$ 米 ³ /秒 ²	
17	日地质量比	$S/E = GS/GE$	332946.0	
18	日与地月系质量比	$(S+E)/(1+\mu)$	328900.5	
19	太阳质量	$S = GS/G$	1.9891×10^{30} 千克	
20	行星质量系统(行星质量倒数)			
	水星	6023600	木星	1047.355
	金星	408523.5	土星	3498.5
	地月系	328900.5	天王星	22869
	火星	3098710	海王星	19314
			冥王星	3000000

在这个常数系统中,利用最新观测资料修订了原有的常数值,增加了常数值的有效位数。各常数间的内部关系也作了必要的调整,例如将天文单位(A)由基础常数改为导出常数,增加引力常数(G)作为基础常数等。

计算天文常数的标准历元由原来的 1900 年改成 2000 年,并记为 $J\ 2000.0$ 。

在这个系统中,时间的天文学单位不再用地球自转或公转运动来定义,而取国际单位制(SI)秒的整数倍来定义,即 1 日(D) $=86400$ 秒。这样一来,天文学中的时间单位就与其他学科领域里的时间单位一致了。

以太阳质量(S)作为质量的天文单位。

长度的天文单位是导出常数 A ,通常就简称为天文单位。

IAU(1976, 1980)天文常数系统已从 1984 年正式启用,同时基本星表 FK₄ 系统也过渡到 FK₅ 系统。

§ 14.10 测定恒星位置的新技术

一、射电天体测量学

射电干涉测量是本世纪 60 年代后期迅速发展起来的一门新技术,随着观测技术的不断完善,在天体测量学领域内已形成一个独立的分支学科——射电天体测量学。

1967 年春,加拿大阿尔贡昆射电天文研究所用一架 46 米射电望远镜(图 14.13)和一架 10 米射电望远镜完成了射电干涉测量的试验。几乎在同一时期,美国也取得了类似试验的成功。

通过射电干涉测量可以测定河外射电源或银河射电星的位置,目前的定位精度已与光学仪器的定位精度相当。同时,射电干涉测量还可确定出地球自转参数,这方面的内容将在下一章中

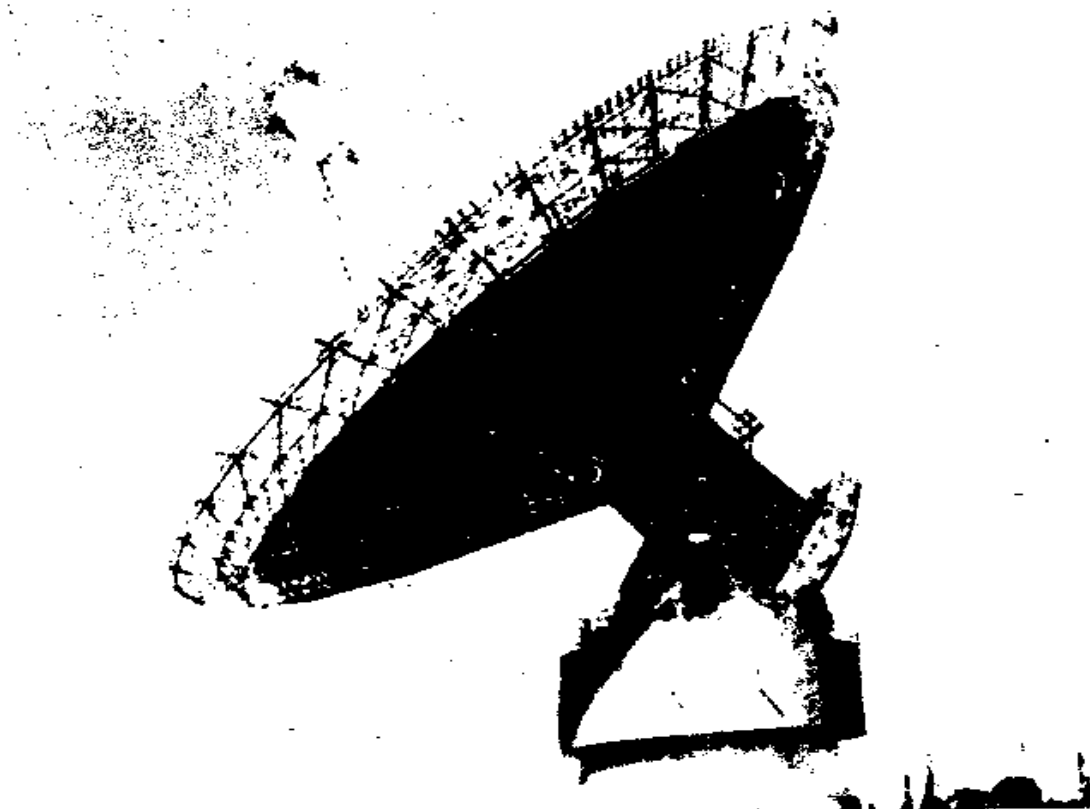


图 14.13 46 米射电望远镜

论述。

射电干涉测量就是利用两架射电望远镜在同一时刻接收某个射电源的电磁辐射，测出射电信号到达两天线的相位差，然后解算出该射电源的位置，地球自转参数以及其他有关信息。

有两种不同的射电干涉测量技术已付诸实现。一种是用电缆（或微波传输）连接的短基线（数千米）干涉测量，又称为连线干涉测量技术（简称 CEI）；一种是甚长基线（数千千米）干涉测量技术（简称 VLBI）。根据目前的发展水平来看，VLBI 用途较广泛，具有更强的生命力。

VLBI 的主要特点是：在两架射电望远镜处，采用原子钟控制的高稳定度独立本振系统和磁带记录装置，观测结果记录在磁带上，然后一起输入电子计算机中，进行相关处理，获得观测结果。

VLBI 的定位精度，据估计近年内可达 $\pm 0.005''$ ，预期不久的将来可提高到 $\pm 0.001'' \sim \pm 0.002''$ 。

由于河外射电源的自行实际上可以忽略，通过射电源的定位观测有可能建立起一个射电源惯性坐标系。把目前采用的以恒星为定标点的基本坐标系与射电源惯性坐标系联系起来，将会对天体测量学的发展产生深远的影响。

二、空间天体测量学

在射电天体测量学兴起的同时，随着空间探测的蓬勃发展，另一个极有前途的天体测量学分支——空间天体测量学应运而生。

空间天体测量计划就是把天文望远镜送到地球外层空间的轨道上，自动进行天体测量观测，测出大量恒星的位置、自行和视差。

与经典的地面天体测量观测相比较，空间天体测量观测具有下述明显的优点：

- (1) 没有大气折射，可消除由于大气折射改正不准确所带来的误差；没有大气抖动和闪烁的影响，星像质量好。
- (2) 没有大气吸收，可观测到更暗弱的天体。
- (3) 没有重力，自动排除了望远镜镜筒弯曲的影响。

由于这些优点，空间天体测量引起了各国天文学家的关注。通过 70 年代以来的反复探讨，目前较成熟的两项空间天体测量计划可望在近几年内实现。

1. 依巴谷天体测量卫星(简称 HIPPARCOS) 这项计划最早是法国天文学家提出的,后被欧洲航天局采纳。这颗卫星的全名是高精度视差采集卫星,将发射到与地球同步的轨道上,卫星每 24 小时绕轴自转 10 圈。计划在两年半的观测期间内,测定 10 万颗恒星(绝大多数亮于 11^m)的星位、自行和视差,观测精度可达 $\pm 0.002''$,这远远超过了当前地面观测结果的数量和质量。依巴谷卫星计划于 1988 年发射。

依巴谷卫星上的望远镜主镜的口径约 25 厘米,等效焦距约 2.5 米。通过一块由两个反射镜面组合成的复合角镜,在望远镜视场内可高精度地测出一对相距约 58° 的恒星之间的角距离。望远镜光学系统示意图见图 14.14。

在卫星自转并绕太阳公转的过程中,望远镜可完成对整个天球的连续扫描,取得恒星间角距离的观测数据 2000~3000 万个。利用先进的计算技术处理这些观测数据,大概需要两年的时间才能解算出恒星的星位、自行和视差来。

可以预计,若干年后(90 年代初)第一批空间天体测量成果的获得,必将对天文学各个分支学科的发展产生难以估量的影响。

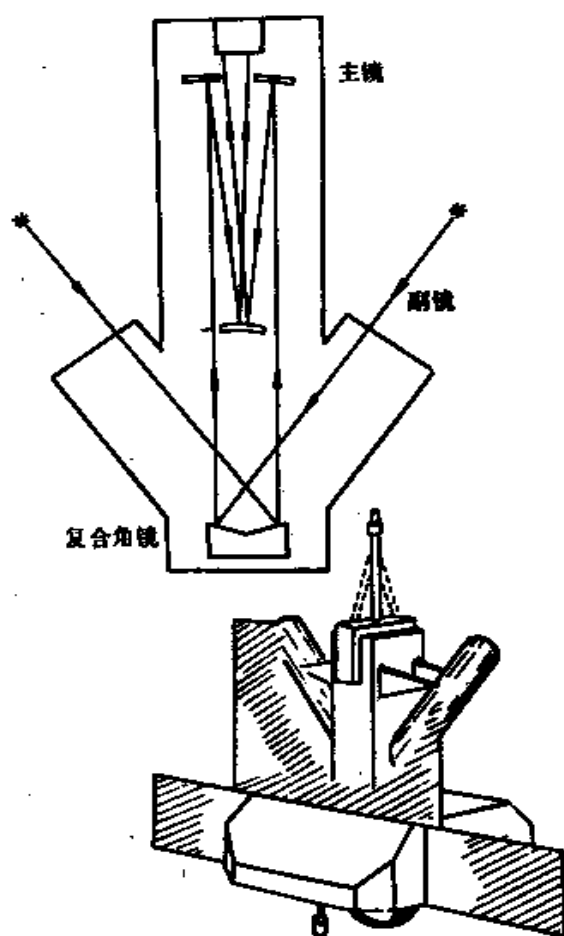


图 14.14 依巴谷卫星的光学系统示意图

2. 空间望远镜 (简称 ST) 这是美国航空和航天局的一项空间探测计划, 准备用航天飞机把一架口径 2.4 米的大型望远镜送入轨道, 预定在 1988 年以后发射。

ST 的分辨率将比最好的地面望远镜提高 10 倍, 极限星等可达 20^m 。预计可使用 15~20 年。

ST 上装载的 6 台仪器中, 有三台与天体测量观测有关, 包括一架暗弱天体摄影机, 一架宽视场和行星摄影机, 以及精密导航传感器。

暗弱天体摄影机的视场是 $11'' \times 11''$, 主要用来测定恒星视差。宽视场和行星摄影机可按两种模式工作: 一种视场为 $160'' \times 160''$, 另一种视场为 $68'' \times 68''$ 。可从事密近双星, 球状星团的成员星与内部运动的研究, 也可测定暗星的视差。

精密导航传感器可用于多方面的天体测量观测, 它既能测定恒星的视差, 又能测出 SAO 星表的亮星相对于射电源的位置和自行。此外, 精密导航传感器还能对太阳系天体跟踪观测。

ST 能观测到 $10^m \sim 17^m$ 的恒星, 测定恒星相对位置的精度可达 $\pm 0.002''$ 。但是, ST 不是巡天型的观测仪器, 它不象依巴谷卫星那样对整个天球进行扫描观测, 而是每次只对准天球上极小的一个区域, 因此所得到的观测结果都是相对的。譬如说, ST 测出的视差事后应经过进一步处理, 并需在观测前选定合适的比较星。用依巴谷卫星和 ST 同时测定同一些恒星的视差, 就有可能求得 ST 测出的这些星的相对视差改正量。

由于空间天体测量观测不是相对于赤道和春分点进行的, 因此只能测定出各恒星的相对位置, 尚需利用高精度的地面观测来定标, 才能归算出它们在基本坐标系中的位置。

第十五章 地球自转参数和天文点的测定原理

§ 15.1 太尔各特法测定纬度

一、原理

为了测定观测地点的纬度，在长期实践的基础上，1857年美国大地测量学家太尔各特(A. Talcott)提出了一种比较精确而实用的方法，称为太尔各特法。这种方法要求依次观测天顶南北两颗天顶距相近的恒星，直接测出两颗恒星的天顶距差，然后根据恒星的已知赤纬就可求出纬度。

一南一北的两颗恒星常称为太尔各特星对(简称星对)，如图15.1所示。因为观测量是星对的天顶距差，所以太尔各特法又常称为天顶距差法。

下面以上中天观测为例说明太尔各特法测纬的原理(参看

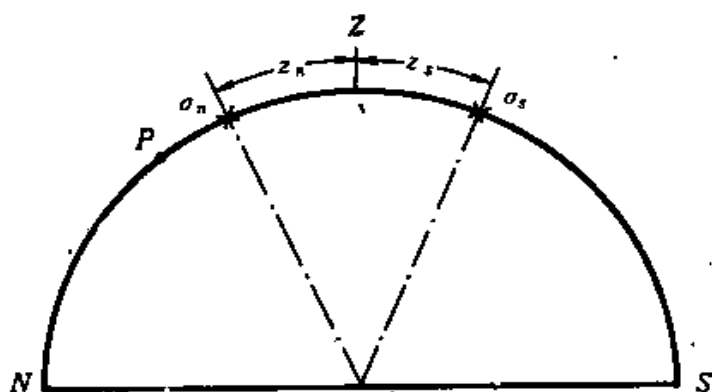


图 15.1 太尔各特星对

图 15.1) 以 δ , z , ξ 和 ρ 分别表示观测瞬间恒星的赤纬, 中天时的真天顶距, 视天顶距和大气折射, 以 φ 表示待测的纬度。对于南星 σ_s 的中天观测, 将有

$$\varphi = \delta_s + z_s = \delta_s + (\xi_s + \rho_s), \quad (15.1)$$

而对于北星 σ_n 来说则有

$$\varphi = \delta_n - z_n = \delta_n - (\xi_n - \rho_n), \quad (15.2)$$

合并 (15.1) 和 (15.2) 式, 可求得纬度

$$\varphi = \frac{1}{2} (\delta_s + \delta_n) + \frac{1}{2} (\xi_s - \xi_n) + \frac{1}{2} (\rho_s - \rho_n), \quad (15.3)$$

这就是太尔各特法测纬的原理公式。式中 $\frac{1}{2} (\delta_s + \delta_n)$ 由星表中查出, 常称为星对赤纬

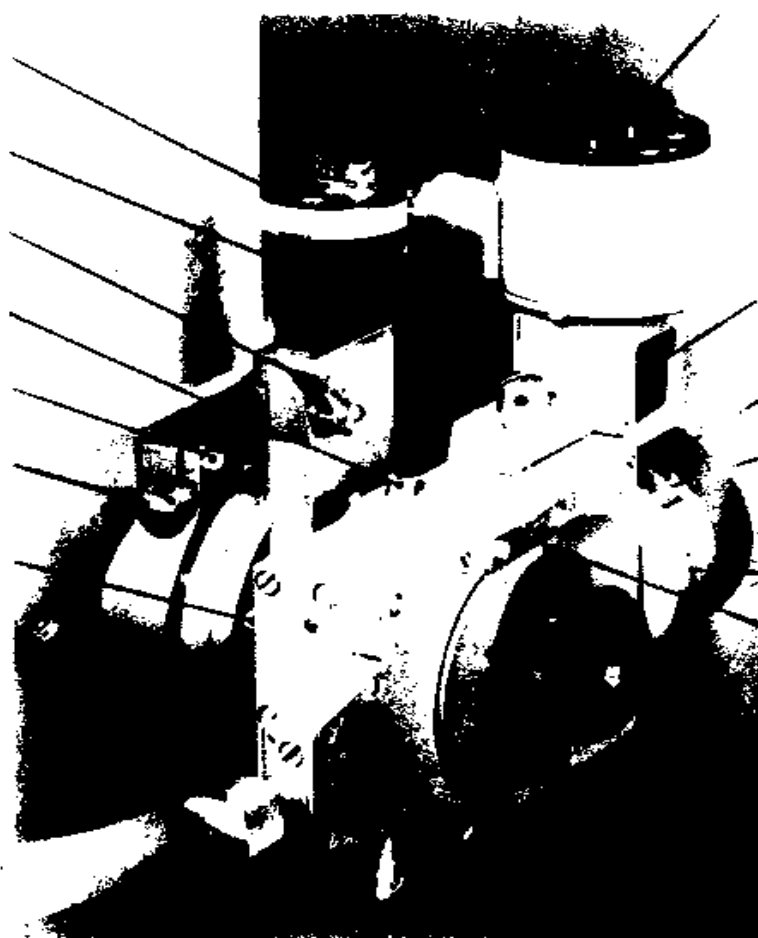
由 (15.3) 式可知, 只要通过观测得到天顶距差 $\frac{1}{2} (\xi_s - \xi_n)$, 改正大气折射之差 $\frac{1}{2} (\rho_s - \rho_n)$ 后就可得到纬度 φ 。

由于在观测中是直接测定 $\frac{1}{2} (\xi_s - \xi_n)$, 而不需分别测定 ξ_s 和 ξ_n , 因此可避免测定天顶距所带来的误差。同时, 因为两颗星的天顶距相差不大, 前后观测时间间隔也不太长, 所以 $\frac{1}{2} (\rho_s - \rho_n)$ 为一小量, 这样就大大削弱了大气折射不准确所带来的误差。

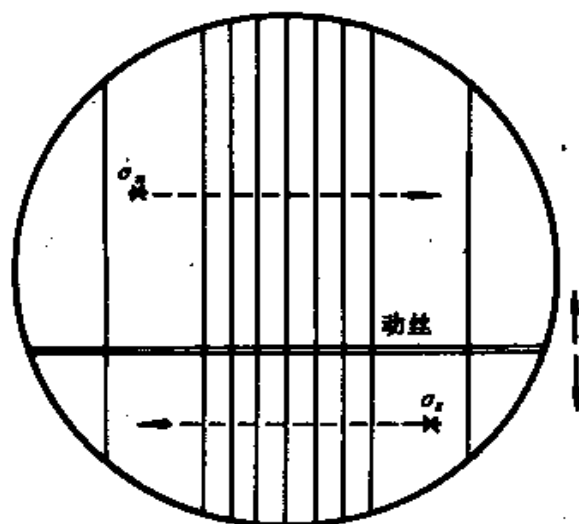
二、观测方法

为了能不通过测量天顶距而直接测出天顶距差, 需要使用专门设计的观测仪器——天顶仪 (参看 § 3.5 中的图 3.37)。

天顶仪的目镜端装有一个目镜测微器 (图 15.2 a), 通过测微轮的旋转带动视场内的动丝移动, 而动丝在视场内移动的距离可用测微轮转过的周数表示出来, 只要知道了测微轮转动一周在天



(a)



(b)

图 15.2 (a) 天顶仪的目镜测微器 (b) 视场丝网

球上所对应的角度(常称为测微器周值),就可将动丝移过的线距离化为天球上的角距。

假定组成太尔各特星对的两颗恒星中,南星先过中天,而北星稍迟;南星的中天天顶距略大于北星的中天天顶距。观测前,根据两颗星的赤纬,可以算出它们的平均中天天顶距,将望远镜指向平均天顶距处,并对准南星。当南星进入视场后(参看图 15.2b),旋转测微轮用动丝对准星像,读出测微轮上的读数 M_s (周数及周的小数)。然后将望远镜绕仪器的垂直轴旋转 180° ,这时望远镜将指向天顶以北平均天顶距处。等候北星进入视场后,同样转动测微轮用动丝对准星像,并读取测微轮读数 M_n 。如果以 R 表示测微器周值,显然有

$$\xi_s - \xi_n = (M_s - M_n)R. \quad (15.4)$$

为保证观测成功,两颗星的天顶距差不能太大,至多不能大于目镜测微器的视场,否则就可能在望远镜转过 180° 后无法使另一颗星出现在视场内。通常,限制星对的天顶距差不超过视场的一半。同时,两颗星依次中天的时刻差,即它们的赤经差最好在 $4^m \sim 10^m$ 范围内,间隔时间太短或太长都对观测不利。

三、观测仪器

天顶仪是专为太尔各特法测纬而设计的。望远镜的口径有 110 毫米, 135 毫米, 180 毫米几种,基本构造大同小异。

讨论观测方法时,实际上假定了望远镜在观测南星和北星的过程中,其天顶距没有任何变化。这一点在仪器旋转 180° 的情况下是很难保证的,一般说总有可能发生微小的变化。为了能反映出望远镜天顶距的这种微小变化,天顶仪附有与镜筒相连的精密水准器(常称为太尔各特水准器),利用水准器的气泡位移量可修正天顶距差的测定值。

目镜测微器, 太尔各特水准器, 以及使仪器迅速旋转 180° 的转轴装置构成了天顶仪的必不可少的部件。

除了目视天顶仪外, 利用照相天顶筒(参看 §3.5 的图 3.36) 也可测定纬度。由于采用了照相方法, 其观测精度优于目视天顶仪。

§ 15.2 纬度变化和地极移动

一、纬度变化的发现

自从 1765 年欧拉预言地球自转轴应在地球本体内绕其惯量主轴旋转(称为自由摆动)以后, 不少天文台都曾试图发现由于地极移动(简称极移)所造成的纬度变化。随着测纬精度的提高, 观测结果证实了纬度变化的存在。但是, 不同天文台的结果并不一致, 很难令人信服这种纬度变化是极移引起的。

1888 年在国际弧度测量总局主持下, 在中欧的柏林、布拉格和波茨坦等地的天文台制订了按太尔各特法观测的计划。两年后, 为了测定经度相差 180° 左右的地点的纬度, 派遣了一支观测队到夏威夷群岛的火奴鲁鲁。对一年多的纬度观测结果进行分析以后, 终于揭示出经度相差 180° 的两地纬度变化曲线的位相恰恰相反的规律, 从而证实了纬度变化的主要成因是地极移动。

1891 年美国天文学家钱德勒(S. C. Chandler)分析了 1837~1891 年间全世界 17 个天文台三万多个纬度观测结果, 发现极移存在两种周期运动: 一种是周期近于 14 个月的自由摆动, 称为钱德勒摆动; 另一种是周年摆动, 这是由大气的周年活动引起的地极受迫摆动。

二、地极移动和纬度变化

为了通过纬度变化来研究地极移动的周期和振幅, 必须推导

出两者间的理论关系式。

在图 15.3 中, 假定 P_0 表示地极的平均位置(简称平均极), P

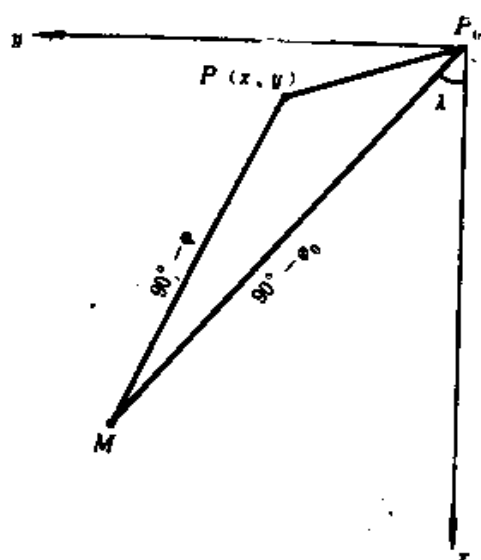


图 15.3 极移和纬度变化

表示地极的瞬时位置(简称瞬时极)。由于极移甚小, 可以将地极附近作为平面来处理。建立一个原点在 P_0 的直角坐标系, x 轴沿格林尼治子午线方向, y 轴指向格林尼治以西 90° 的方向。令 P 相对于 P_0 的坐标为 (x, y) , 并称为地极坐标。对于经度为 λ (这里规定西经为正) 的一个观测地点 M , 在某一瞬间, M 点的瞬时纬度 φ 与平均纬度 φ_0 之差 $\Delta\varphi$ 等于

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = x \cos \lambda + y \sin \lambda. \quad (15.5)$$

上式称为科斯京斯基 (С. К. Костинский) 公式。利用两个以上的天文台测出的纬度变化, 按 (15.5) 式就可求解出地极坐标 (x, y) 。

三、极移对经度的影响

极移造成纬度变化的同时, 还引起观测地点经度的变化, 其关系式为:

$$\Delta\lambda = (x \sin \lambda - y \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi. \quad (15.6)$$

由 (15.6) 式可知, $\Delta\lambda$ 是观测地点坐标 (λ, φ) 的函数。因此, 在不同观测地点利用测定地方时而得到的世界时互不

相同。为了统一世界各地测定时间的结果，应消除极移的影响。

四、极移服务

利用天体测量观测手段提供系统的地极坐标的工作称为极移服务。通常，每隔 0.05 年计算出一组地极坐标 x 和 y ，将若干年内的 x 和 y 值点在图上，可以画出地极移动的轨迹，如图 15.4 所示。

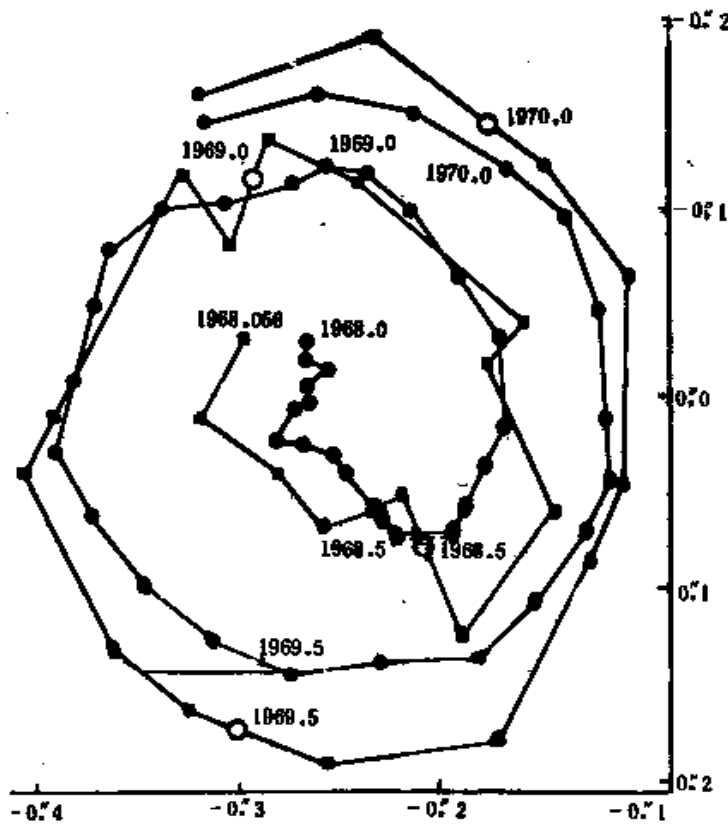


图 15.4 1968.0—1970.0 的地极移动轨迹圆点表示 ILS 的资料；方块表示 BIH 的资料

曾先后有三个国际性组织负责确定地极坐标。它们是国际纬度服务(简称 ILS)，国际极移服务(简称 IPMS)，以及国际时间

局(简称 BIH)。

ILS 是 1899 年成立的, 在北纬 $39^{\circ}08'$ 纬圈上设立了配备天顶仪的国际纬度站(不同时期参加的台站数目有些变动, 最后由五个台站组成了 ILS 系统)。观测结果由 ILS 中央局统一处理, 从 1962 年起 ILS 中央局固定设在日本的水泽国际纬度站。1982 年 7 月美国的两个国际纬度站撤消, 致使 ILS 解体。

IPMS 成立于 1962 年, 资料处理中心设在日本水泽国际纬度站。IPMS 除发表用五个 ILS 站的测纬资料推算的 x, y 以外, 同时还利用全球各天文台的测纬资料提供另一套 x, y 值。

BIH 是一个国际性的时间服务机构, 设在法国的巴黎天文台内。BIH 曾从 1955 年起, 利用若干台站的测纬资料快速确定 x, y , 称为极移快速服务。1968 年又联合利用测纬和测时资料, 推求 x, y 和世界时, 称为 1968 年 BIH 系统。

半个多世纪以来的研究表明, 极移的振幅不超过 $0.5''$, 其中除钱德勒自由摆动和周年受迫摆动外, 尚含有半年周期及数十年周期的分量; 还发现了可能存在的地极的长期漂移。

由于经典光学仪器观测精度的局限性, 若干极移的规律和特征尚未彻底查明, 现正寄希望于发展中的各种新技术(参看 § 15.6)。

§ 15.3 中星仪测时

一、天文测时的基本公式

在某一给定瞬间, 地方恒星时 s , 恒星的时角 t , 以及恒星

赤经 α 三者之间的关系为

$$s = t + \alpha. \quad (15.7)$$

天文测时是指观测一颗 α 已知的恒星，记录观测时刻的钟面读数 T ，那么天文钟的钟差 u 就等于

$$u = (t + \alpha) - T. \quad (15.8)$$

上式表明，只要能通过天文观测确定恒星的时角 t ，钟差 u 就可求出，这样天文测时的目的也就达到了。

特别是依据 (15.8) 式，如果在恒星中天时观测，这时 $t=0$ ，那么

$$u = \alpha - T. \quad (15.9)$$

这就是中天法测时的基本公式。

二、中星仪测时的方法

为进行中天法测时，专门设计了中星仪（参看 § 3.5 的图 3.38）。中星仪的结构与第十四章提到的大中星仪类似，只是望远镜口径较小，一般为 10 厘米，仪器结构也较轻便。

利用中星仪测时，考虑到仪器误差 i ， c ， k 的存在，可将梅耶公式 (14.13) 改写为：

$$u = \alpha - T - [c \sec \delta + i \cos(\varphi - \delta) \sec \delta + k \sin(\varphi - \delta) \sec \delta]. \quad (15.10)$$

如把 i 和 c 的值预先定出并在观测时刻中扣除其影响，(15.10) 式可写成：

$$u + kK = \alpha - T. \quad (15.11)$$

式中 $K = \sin(\varphi - \delta) \sec \delta$ ， T 内已包含了 i 和 c 的影响。

由(15.11)式可知, 每观测一颗恒星, 就可列出一个含有两个未知数 u 和 k 的方程。因此, 从原理上讲, 只要观测两颗恒星就能确定钟差。

在实际工作中, 往往选取 10 颗以上的恒星作为一组来测时, 这样就需利用最小二乘法求解, 最后同时给出钟差 u 和方位差 k 。

进一步分析 (15.11) 式可以看出, 不同的恒星对测定方位差 k 的作用也不同。显然, 系数 K 越大, 对确定 k 越有利, 这就需观测拱极星和天顶距大的恒星。而为了对确定 u 最有利, 应选那些能使 $K=0$ 的恒星, 即天顶附近的恒星。综合这两方面的要求, 一组测时星可按下述组合来选取, 包括: 10 颗左右近天顶星, 2~3 颗赤道星, 1~2 颗拱极星。

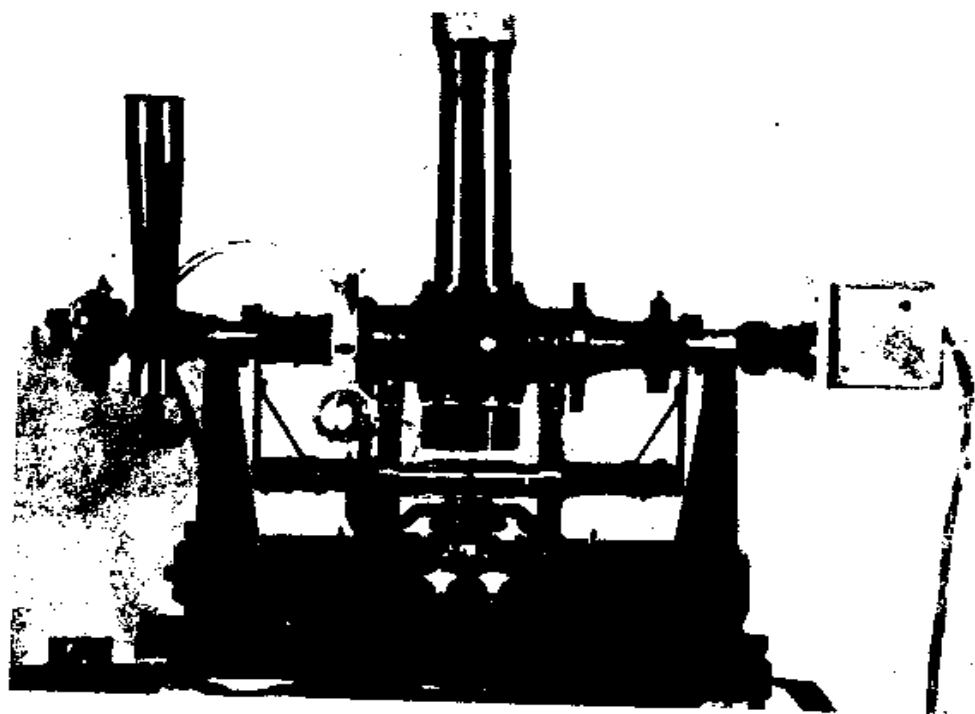


图 15.5 光电中星仪

三、其他测时仪器

除目视中星仪外，还有光电中星仪(图15.5)，它是在目视中星仪上加装光电记录设备和导星镜而制成的一种测时仪器。利用导星镜来寻星，通过光电记录装置自动记录恒星过中天的时刻。由于摆脱了因人而异的人差对观测结果的影响，使测时精度有大幅度的提高。

照相天顶筒能够同时测纬和测时，观测精度也很高。

§ 15.4 精确时间的发播

一、天文钟和守时工作

早期，人们利用天文摆钟来守时，并通过天文测时进行校准。天文摆钟一般采用秒摆，摆长约 990 毫米。由于摆钟受温度变化和重力的影响，最好的天文摆钟的日误差为几个毫秒。

1927 年出现了石英钟，1932 年开始用于天文台的守时工作，后经不断改进，到本世纪 50 年代已取代了天文摆钟。石英钟的核心是一个晶体振荡源，它是依据石英晶体的压电原理制成的。晶体振荡的频率很稳定，最好的石英钟的误差在几十年内不超过一秒。

美国在 1949 年制成了世界上第一台原子钟——氨分子钟。1955 年英国研制成功第一台铯原子钟。此后，又相继出现了氢原子钟、铷原子钟等，进入了利用原子频率标准计量时间的新纪元。

原子钟的频率准确度和稳定度很高，例如，铯原子钟的频率准确度可达 10^{-13} 。同时，原子钟具有很好的复制性。在 1967 年

10月举行的第13届国际度量衡大会上,决定把原子时秒长作为国际单位制(SI)的时间单位,使时间计量标准从天文学的宏观过程过渡到物理学的微观领域。

尽管原子钟的频率稳定度很高,但研究表明,绝大多数原子钟的输出频率仍存在随机性起伏及系统性漂移。这样一来,由各个原子钟所提供的钟面时,在所需精度范围内会略有差异。

利用原子钟守时,往往选用一组原子钟,通过高精度的比对尽可能消除各种系统漂移和随机起伏的影响,用统计方法组成所谓平均原子钟,以提供原子时。

二、无线电时号和播时工作

近代的播时方法是在无线电通讯技术发明以后,通过无线电时号的发播和收录而实现的。无线电时号的首次实验性发播是1904年在美国进行的,接着在1910年法国和德国先后实现了用短波无线电台发播时号。BIH在1920年1月1日正式开始活动后,负责协调全世界各天文台的授时工作。

为了使用部门的方便,无线电时号应具备下列条件:

(1) 时号所指示时刻的明确性

时号应具有易于识别的标准时间的时、分和秒。为此时号应按预先编排好的程序和节目单发播,使收录者很容易从接收到的一组时号中区分出每个时号所对应的标准时刻。

(2) 讯号间距的稳定性

时号不仅应秒间距、分间距保持不变,还要求日间距也尽量保持恒定。这样便于使用者内插或外推任一瞬间的标准时刻。

(3) 时号的清晰性

为了在地球上不同地点都能很好地收录和使用时号,必须研究电离层反射条件变化的规律,选择适宜的发播频率,采用足够

的发射功率以及有效的发射天线。

目前,全世界有 26 个国家的近 50 个短波无线电台发播时号,其中全天 24 小时连续发播时号的有 12 个国家,包括中国的陕西天文台,电台呼号为 BPM。BPM 时号有两类:以 UT_1 为基础的 BPM_1 , 和协调世界时 BPM_c 。

BPM 的发播频率有: 10 兆赫(世界时 $0^h \sim 24^h$), 5 兆赫(世界时 $9^h \sim 1^h$), 以及 15 兆赫(世界时 $1^h \sim 9^h$)。BPM 时号以半小时为一发播周期, 其发播程序如下:

$59^m00^s \sim 00^m00^s$	BPM 呼号(1 分钟)
$00^m00^s \sim 05^m00^s$	BPM_c 时号(5 分钟)
$05^m00^s \sim 10^m00^s$	BPM_1 时号(5 分钟)
$10^m00^s \sim 15^m00^s$	供校准频率用的无 调制载波(5 分钟)
$15^m00^s \sim 25^m00^s$	BPM_c 时号(10 分钟)
$25^m00^s \sim 29^m00^s$	BPM_1 时号(4 分钟)

当前,短波无线电时号的精度可达 $\pm 0.001^s$ 。为了适应更高精度的要求,各种新型技术手段,诸如电视同步、卫星通讯时间同步、长波和超长波授时等相继问世,把授时工作的精度推进到了微秒(10^{-6} 秒)数量级。

§ 15.5 世界时、历书时和协调世界时

在 § 2.5 中已初步介绍过几种不同的时间计量系统,本节将从天体测量学的角度作更深入的讨论。

一、世界时

世界时即格林尼治平太阳时,它是以地球自转为依据而建立

的一种时间计量系统。显然，地球自转速率的不均匀性和极移的影响都包含在世界时中。

1956年起，把世界时划分为三种：

(1) UT_0 ——由各天文台根据天文测时结果直接推算出来的世界时。

(2) UT_1 ——在 UT_0 中作极移的修正，即加上 (15.6) 式给出的 $\Delta\lambda$ 值。

(3) UT_2 ——在 UT_1 中引进地球自转速率季节性变化的经验改正项 ΔT_s 。分析了大量天文测时资料查明 ΔT_s 的变化规律逐年相当接近，可表为下列经验公式：

$$\Delta T_s = a \sin 2\pi t + b \cos 2\pi t + a_1 \sin 4\pi t + b_1 \cos 4\pi t. \quad (15.12)$$

式中 t 以年为单位，从贝塞耳岁首起算。

从 1962 年起，国际时间局采用的 (15.12) 式中各系数值为

$$\left. \begin{aligned} a &= 0.022^s, \\ b &= -0.012^s, \\ a_1 &= -0.006^s, \\ b_1 &= 0.007^s. \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

这三种世界时系统间的关系为：

$$\left. \begin{aligned} UT_1 &= UT_0 + \Delta\lambda, \\ UT_2 &= UT_1 + \Delta T_s = UT_0 + \Delta\lambda + \Delta T_s. \end{aligned} \right\} \quad (15.14)$$

UT_1 是地球自转角度的反映，因此常将其变化量 ΔUT_1 作为地球自转的一个参数。

UT_2 不仅含有地球自转速率的长期变化和不规则变化，而且还受经验改正 ΔT_s 不够严格的影响，因此 UT_2 并非是一个均匀的时间计量系统。

二、历书时

为了克服世界时的不均匀性,1960年定义了以地球公转为基准的历书时,简称ET。

纽康在分析了250年来积累的太阳观测资料,并总结了对地球公转运动的理论研究以后,给出了计算太阳平黄经的公式:

$$L_{\odot} = 279^{\circ} 41' 48.04'' + 129602768.13'' T + 1.089'' T^2. \quad (15.15)$$

式中 T 为从1900年1月0.5日起算的儒略世纪数(等于36525平太阳日)。

由(15.15)式可求得当 $T=0$ 时,即1900.0年回归年的长度

$$\begin{aligned} & \frac{(36525 \times 86400^s)(360 \times 60 \times 60'')}{129602768.13} \\ & = 31556925.9747^s. \end{aligned} \quad (15.16)$$

把1900年初太阳几何平黄经等于 $279^{\circ} 41' 48.04''$ 的瞬间作为历书时1900年1月0日12^h整,而将该瞬间回归年长度的31556925.9747分之一定义为历书时秒。

将一回归年(1900)所包含的历书时秒数31556925.9747作为IAU(1964)天文常数系统中的定义常数之一。

由历书时的定义可以看出,它是在精确掌握了地球公转运动规律的基础上建立的一种均匀时间计量系统。但是,历书时的测定需观测能反映地球公转的天体——太阳,由于观测太阳误差太大,在实际工作中利用月球的方位观测来确定历书时。即便如此,历书时的测定精度仍不够高,直到原子钟出现后,建立一种更均匀而稳定的时间计量系统才成为可能。

三、原子时

原子时秒长的定义在 § 2.5 中已讲过。这里, 将对国际原子时的建立以及协调世界时的采用等作进一步的介绍。

1. 国际原子时(TAI) TAI 时刻的起算点取为 1958 年 1 月 1 日 0^h UT, 这一瞬间原子时与世界时仅差 -0.0039^s 。TAI 的单位是 SI 秒。

TAI 自 1972 年 1 月 1 日正式启用, 目前由国际时间局根据世界各天文台的铯原子钟的相互比对来保持。并已向前外推而得出了 1956~1971 年期间的原子时。

2. 协调世界时(UTC) 由于世界时的秒长逐年增加, 势必造成世界时时刻落后于原子时, 在一年内可积累达 1^s 左右。然而天文导航和空间探测等部门仍需要以地球自转角度为依据的 UT₁。因此, 为避免发播的原子时与 UT₁ 产生过大偏离, 1972 年起国际上发播无线电时号时, 采用了协调世界时 UTC, 其时间单位仍用 SI 秒, 其时刻与 UT₁ 的偏离始终保持不超过 0.9^s 。保持的方法是在年中或年末跳秒(即增加 1^s 或减去 1^s), 跳秒前预先通知各使用部门。

3. 力学时 1976 年国际天文学联合会决定, 在天体动力学的理论研究以及天体历表的编算中, 从 1984 年起用力学时取代历书时。

力学时又分为两种。相对于太阳系质心的运动方程组及有关历表, 时间引数用质心力学时, 记作 TDB; 而相对于地心视位置历表的时间引数用地球力学时, 记为 TDT。

力学时是建立在 TAI 基础上的, 规定 1977 年 1 月 1 日 0^h00^m00^sTAI 瞬间, 对应的 TDT 为 1977 年 1 月 1.0003725 日(即 1 日 0^h00^m32.184^s)。力学时的基本单位是日, 1 日等于

86400 SI 秒。

根据广义相对论原理, 可以做到在 TDB 和 TDT 之间不存在长期项, 而只存在微小的周期性变化, 其中最大的项是周年变化, 振幅为 0.001658^s 。

§ 15.6 测定地球自转参数的新技术

一、地球自转参数

地极坐标 x, y , 以及世界时 UT_1 的变化量 $\Delta UT_1 = UT_1 - UTC$, 常称为地球自转参数, 简记为 ERP。

利用经典的光学仪器测定 x, y 和 ΔUT_1 , 由于受到测角精度的限制, 很难使测定结果的误差小于 ± 30 厘米 (相当于 $\pm 0.01''$)。本世纪 60 年代后期发展起来的射电干涉测量技术和激光测距技术提供了突破这一限制的可能性。

1978 年, 国际天文学联合会和国际大地测量与地球物理联合会 (IUGG) 共同发起了地球自转联测, 简称为 MERIT 计划。该计划包括多种观测手段的联测, 观测资料的分析处理以及总结等阶段。第一次联合观测 (短期联测) 在 1980 年 8~10 月进行; 第二次联测 (主联测) 从 1983 年 9 月至 1984 年 10 月共延续了 14 个月。主联测期间还包括三个月 (1984 年 4 月~6 月) 的加密联测。最后, 于 1985 年 7 月底在美国举行了一次国际会议, 作出了 MERIT 计划的总结, 以及对今后测定地球自转参数的建议。

MERIT 计划的主要目的是:

- (1) 全面比较测定 ERP 的各种技术手段;
- (2) 通过多种手段的联测, 取得可靠性和时间分辨率更高的 ERP, 以加深人们对地球运动及其与各种地球物理现象间联系的认识。

通过 30 多个国家的近 120 个台站数年的共同努力, MERIT 计划取得了成功。这项计划的成功导致在 1985 年 11 月举行的 IAU 第 19 届大会上通过一项决议, 决定成立一个新的国际地球自转服务(IERS)机构, 将从 1988 年 1 月起取代现有的 IPMS 和 BIH。

未来的 IERS 主要采用三种测定 ERP 的新技术: 甚长基线干涉测量技术(VLBI), 月球激光测距(LLR), 人造卫星激光测距(SLR)。下面将分别介绍它们的工作原理。

二、VLBI 测定 ERP 的原理

如图 15.6 a 所示, 地面上基线长度为 D 的两座射电望远镜 B_1 和 B_2 , 同时观测一个射电源 S , 被接收讯号的几何程差 d 为

$$d = D \sin \theta. \quad (15.17)$$

相应的几何延迟时间 τ_0 为

$$\tau_0 = \frac{d}{c} = \frac{D}{c} \sin \theta. \quad (15.18)$$

式中 c 为光速。

作一个地心天球, 如图 15.6 b 所示。将基线矢量 $\overrightarrow{B_1 B_2}$ 和射电源矢量 $\overrightarrow{B_1 S}$ 投影到天球上, 得 B 点和 S 点。在地心赤道坐标

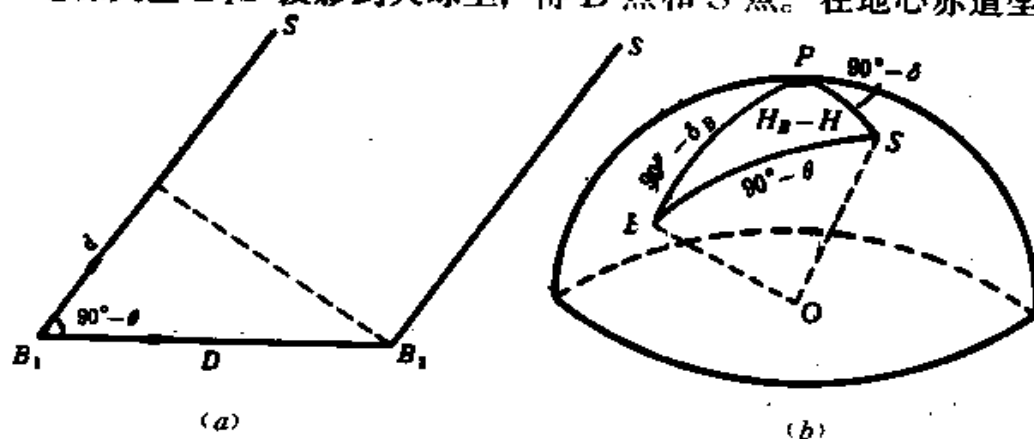


图 15.6 VLBI 测定原理

系中, 设点 B 的赤纬为 δ_B , 格林尼治时角为 H_B , 而射电源 S 的赤纬为 δ , 格林尼治时角为 H 。

在球面三角形 PBS 中, 利用余弦公式可得

$$\sin \theta = \sin \delta \sin \delta_B + \cos \delta \cos \delta_B \cos(H_B - H). \quad (15.19)$$

将上式代入(15.18)式中, 有

$$\tau_0 = \frac{D}{c} [\sin \delta \sin \delta_B + \cos \delta \cos \delta_B \cos(H_B - H)]. \quad (15.20)$$

在(15.20)式中, 延迟时间 τ_0 是观测量, c 为已知量。待求量有 D , δ_B 和 H_B (称为基线参数); δ 和 H (射电源的赤道坐标)。如果进行数个射电源的若干次观测, 就可确定基线参数和射电源位置了。

易于理解, 当地极移动时, 基线参数 δ_B 将发生变化 $\Delta\delta_B$, 地极坐标 x , y 与 $\Delta\delta_B$ 的关系就是(15.5)式, 即

$$\Delta\delta_B = x \cos \lambda_B + y \sin \lambda_B. \quad (15.21)$$

式中 λ_B 为 B 点的经度, 可由 H_B 推算出来。

利用两条不同基线的赤纬变化量, 就可联合求解出地极坐标 x , y 。

在与地球固连的坐标系中, 只有 τ_0 和 H 随时间而变化, 故求(15.20)式对时间的导数, 可得

$$\frac{d\tau_0}{dt} = \frac{D}{c} \left[\cos \delta \cos \delta_B \sin(H_B - H) \frac{dH}{dt} \right]. \quad (15.22)$$

通过跟踪观测射电源可得出 $\frac{d\tau_0}{dt}$, 按(15.22)式易于解出 $\frac{dH}{dt} = \Omega$, 这就是地球自转角速率。知道了 Ω 以后, 不难推求出 ΔUT_1 来。

70年代后期, 美国曾拟定过一项用 VLBI 测定 x , y 的计划, 建立了由三个台站组成的 VLBI 网, 通过 8 小时的观测, 测定 x , y 的精度已高于 10 厘米, 比经典技术提高了一个数

量级。另外的实验观测表明, VLBI 测定 ΔUT_1 的精度可达 $\pm 0.0002^s$, 也同样比经典技术高一个数量级。

通过 MERIT 计划的实施, VLBI 测定 ERP 的精度已提高到 5 厘米。

三、LLR 测定 ERP 的原理

1967 年 7 月美国发射的宇宙飞船“阿波罗”11 号在月面上放置了一个角反射器列阵(参看图 4.26), 11 天以后美国利克天文台就用一架三米反射望远镜收到了从月面反射回来的激光束回波。此后, 在美国麦克唐纳天文台用 2.7 米反射望远镜从事系统地观测, 从 1970 年 10 月起正式提供地球自转参数 ΔUT_1 , 同时还取得了一系列有重大科学意义的成果。

从“阿波罗”11 号登月成功后至今, 美国和苏联先后在月面上总共放置了 5 个角反射器, 其中“阿波罗”15 号放置的角反射器成为激光测距观测的主要目标。

LLR 的工作原理并不复杂, 把激光发生器产生的激光光束通过望远镜发射到月球上, 月面上的角反射器将入射光束按原方向反射回地面, 激光束回波被望远镜接收, 并记录下激光束往返的时间间隔, 这个时间间隔称为观测时延 τ_0 。显然, 从观测站到角反射器的观测距离 r_0 为

$$r_0 = \frac{1}{2} \tau_0 c. \quad (15.23)$$

式中 c 为光速。

在图 15.7 中, O 为地心; M 为观测站, M 的地心距为 R , 经度和纬度分别为 λ 和 φ ; A 为月面上的角反射器, 它与 M 站的距离为 r ; 角反射器 A 的地心距为 a , 其地心天顶距为 z 。

由图 15.7 可知, 下列关系式成立:

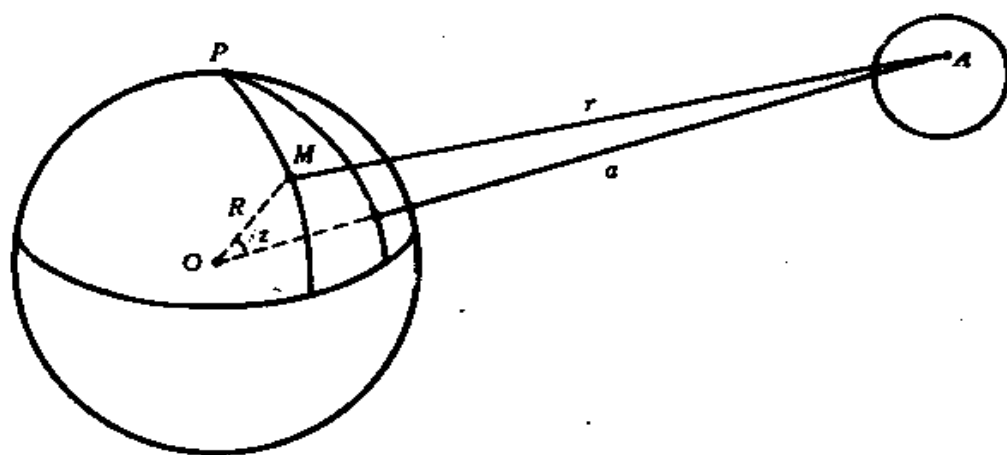


图 15.7 LLR 测定原理

$$r = a - R \cos z. \quad (15.24)$$

利用

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H, \quad (15.25)$$

式中 δ 和 H 分别为角反射器 A 的赤纬和时角。于是, (15.24) 式可写成

$$r = a - R \sin \varphi \sin \delta - R \cos \varphi \cos \delta \cos H. \quad (15.26)$$

另一方面, 根据 M 和 A 的空间位置, 利用天体力学理论可计算出 M 与 A 的距离 r_c , 从而可知激光束从发射到接收所需的时延计算值 τ_c 。它与观测时延 τ_0 之差为 $\Delta\tau = \tau_0 - \tau_c$, $\Delta\tau$ 中包含着地球自转参数, M 和 A 的位置误差, 月球轨道要素误差, 月球物理天平动等的影响。

对 (15.26) 式求微分, 并用一次差代替微分后, 可得

$$\begin{aligned} \Delta r = r_0 - r_c = & R \Delta\varphi (\sin \varphi \cos \delta \cos H - \sin \delta \cos \varphi) \\ & + R \Delta H \cos \varphi \cos \delta \sin H + C_i. \end{aligned} \quad (15.27)$$

式中用 C_i 表示除 $\Delta\varphi$ 和 ΔH 以外, 所有对 r 有影响的参数。在几天内, 可认为这些参数的影响变化不大, 即把 C_i 视为常数。

通过两个以上台站的 LLR 观测, 可联合求解出 $\Delta\varphi$ 和 ΔH 。

实际上, ΔH 就是恒星时的变化量, 易于换算成 ΔUT_0 。再次利用(15.5)和(15.6)式, 即

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= x \cos \lambda + y \sin \lambda, \\ \Delta UT_1 &= \Delta UT_0 + (x \sin \lambda - y \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (15.28)$$

就可以获得地球自转参数 x , y , ΔUT_1 了。

由于 LLR 的观测设备昂贵, 技术要求复杂, 且在新月期间无法观测, 因此 LLR 的发展比较缓慢。在 MERIT 主联测期间, 只有三个台站开展了 LLR 观测。

四、SLR 的工作原理和现状

SLR 最早出现于 60 年代中期, 近 10 年来发展速度较快, 测定精度也有较大提高。使用的观测仪器称为人造卫星激光测距仪, 图 15.8 是上海天文台的第二代激光测距仪示意图。目前, 国际上已研制成功了第三代激光测距仪。

SLR 测定 ERP 的原理是: 从地面观测站朝卫星发射激光束, 经卫星上的角反射器反射后, 再由测距仪的望远镜接收返回的讯号, 利用计数装置可测出激光束往返的时间间隔, 从而推算出卫星的距离。然后, 与 LLR 类似, 根据卫星距离的测定值就可推算出 ERP。

专为 SLR 技术而发射的人造卫星常称为激光卫星。目前, 经常观测的有两颗: 一颗 STARLETTE 卫星, 是法国空间研究中心在 1975 年 2 月发射的。它的特征是体积小且呈圆球形, 直径 24 厘米, 截面积 0.0452 平方米, 重 47.295 千克。轨道高度约 950 千米, 轨道倾角 50° 。在它的表面覆盖着 60 块均匀分布的角反射器。

另一颗是激光地球动力学卫星, 简称 LAGEOS。它是美国航空和航天局在 1976 年 5 月发射的, 呈圆球形, 直径 60 厘米,

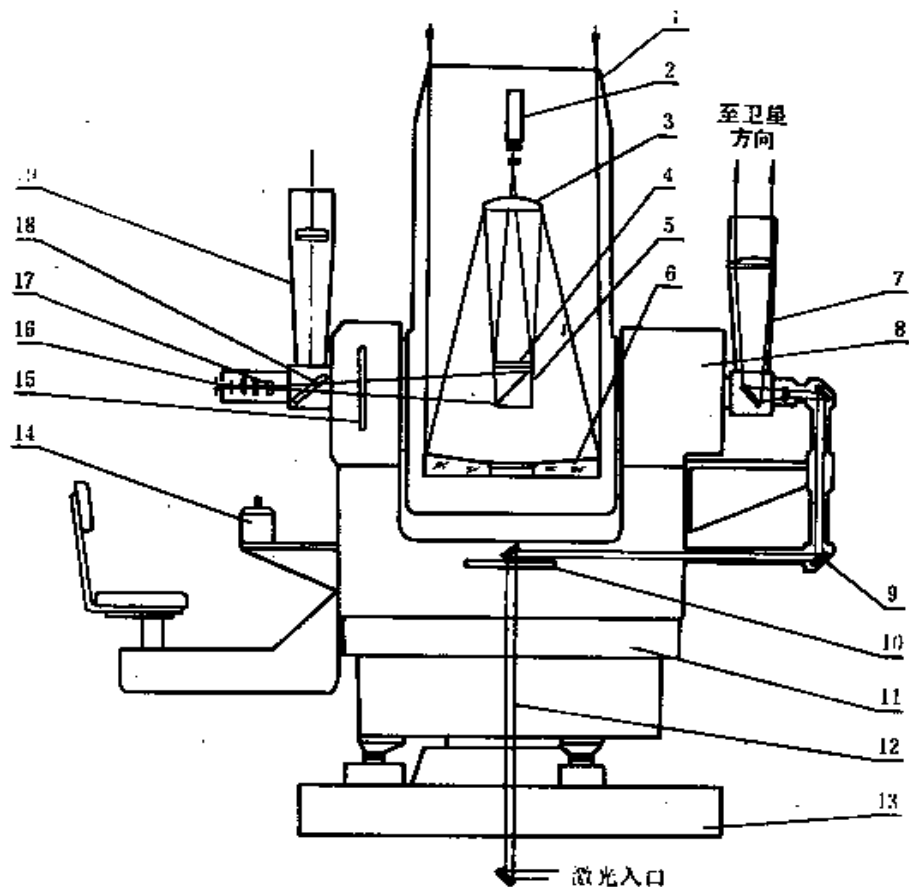


图 15.8 第二代人卫激光测距仪

1. 主镜筒 2. 光电倍增管 3. 副镜 4. 弯月型分光镜 5. 45° 反光镜
 6. $\phi 600$ mm 主镜 7. 发射镜($\phi 150$ mm) 8. 高度力矩电机及测速机
 9. 45° 介质膜全反光镜 10. 方位编码器 11. 方位力矩电机及测速机
 12. Coude 系统 13. 基座 14. 单杆 15. 高度编码器 16. 目镜
 17. 改正镜 18. 可翻动 45° 平面镜 19. $\phi 150$ mm 导星镜

重 411 千克。轨道高度约 5800 千米，轨道倾角 110° 。它的表面覆盖着 426 块角反射器。

由于 LAGEOS 的轨道高度几乎等于地球的半径，因此它的轨道稳定，比 STARLETTE 卫星更易于精密定轨，也就更适合于 ERP 的测定。

在 MERIT 主联测期间，有 19 个国家的 27 个台站从事 SLR

观测。测定 ERP 的精度为 5 厘米。

§ 15.7 测定天文点的原理和仪器

一、原理

在地面上确定一个观测地点的位置，需要地理纬度和地理经度两个坐标。而为了计量被测目标的方位角，则需要知道观测地点的子午线方向。地面点子午线的方向往往用某一地面方位标的天文方位角来确定。

通过天文观测来确定纬度 φ ，经度 λ 以及地面目标方位角

A ，这就是天文点测定的内容。等级较高的天文点所要求的测定精度为：纬度 $\pm 0.30''$ ，经度 $\pm 0.02''$ ，方位角 $\pm 0.5''$ 。

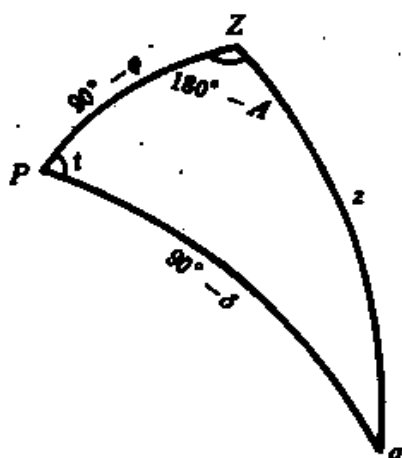


图 15.9 天文三角形

如图 15.9 所示，解决测定天文点的问题，实际上就是求解一个由天顶 Z ，天极 P 以及天体 σ 组成的天文三角形。假定观测一颗恒星 σ ，其 α 和 δ 已知；该恒星在观测瞬间的时角和天顶距为 t 和 z 。利用余弦公式有

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t. \quad (15.29)$$

同时有

$$t = s - \alpha = (T + u) - \alpha. \quad (15.30)$$

式中 s 为地方恒星时， T 为天文钟的读数， u 为钟差。

由 (15.29) 式可知，如果测出恒星的天顶距 z ，并记录下观测时刻 T ，在已知 u 的情况下，就可以求解出观测地点的纬度 φ 。

另一方面，如果 φ 为已知，通过测定天顶距 z 可求得钟差 u ，

从而得到地方恒星时 s 。利用 s 就能进一步推算出观测地点的经度 λ 。

从上述基本原理可以看出，要测定天文点，必须拥有一架能测出恒星地平坐标的测角仪器，以及一套记录观测时刻的设备——天文钟和记时仪。

二、天文经纬仪及其使用方法

用来测定天文点的测角仪器称为天文经纬仪，它是一种小型的地平式天体测量仪器，如图 15.10 所示。

天文经纬仪具有相互正交的两个旋转轴。一个轴沿水平方向，称为水平轴，望远镜可绕水平轴在垂直面内旋转；另一个轴沿铅

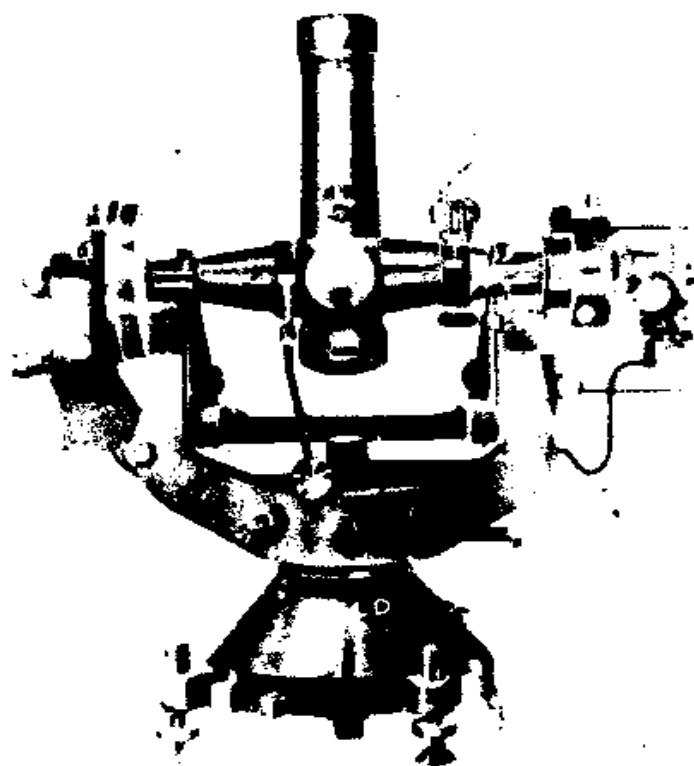


图 15.10 天文经纬仪

垂线方向，称为垂直轴，整个仪器的上部(包括望远镜和水平轴)可绕垂直轴在水平面内旋转。

与子午环一样，望远镜视线应垂直于水平轴。当视线绕水平轴旋转时，它将在天球上描绘出地平经圈；而整个仪器绕垂直轴旋转时，视线在天球上描绘出地平纬圈。

在水平轴上与视线平行安放着一个度盘——垂直度盘，而在垂直轴上水平安放一个水平度盘。当视线瞄准天球上一颗恒星时，根据这两个度盘的读数就可分别测出恒星的地平坐标(天顶距和方位角)。

在使用经纬仪观测前，首先要调整仪器的垂直轴指向铅垂线方向，这一步骤常称为经纬仪的置平。天文经纬仪的基座上装有三个脚螺旋，调节脚螺旋利用附在基座上的水准器就可把仪器置平。

三、天顶点的测定方法

为了测定天顶距，先要知道观测地点的天顶在垂直度盘上的读数，该读数称为天顶点，以 M_z 表示。显然，知道了 M_z 以后，只要读取任一观测目标的垂直度盘读数 M ，则该目标的天顶距 z 应等于

$$z = M - M_z. \quad (15.31)$$

下面讨论测定天顶点的具体方法。常用的垂直度盘是顺时针向刻度的全圆周式度盘，当视线指向天顶时，垂直度盘读数恰好在 0° 左右，如图 15.11 所示。

在实际工作中，分别于仪器的两个位置——盘左和盘右观测同一个地面目标，就可定出天顶点，所谓盘左观测是指垂直度盘位于视线左方，盘右观测则指度盘位于视线之右。

对于盘左观测，记目标的垂直度盘读数为 L ，由图 15.12a

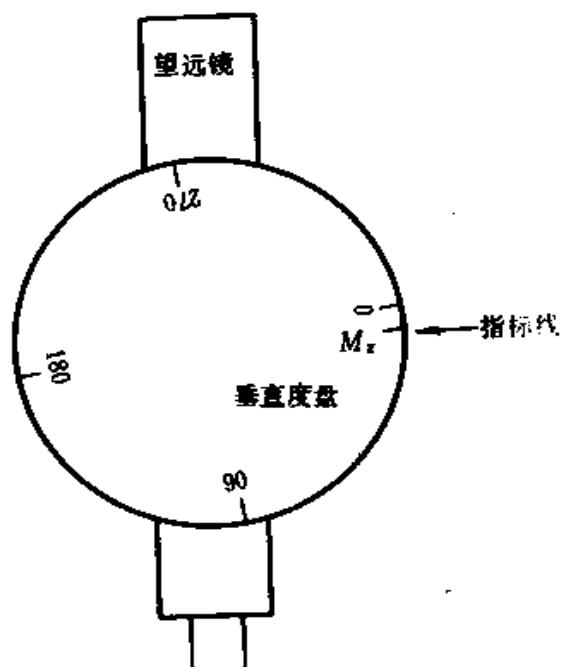


图 15.11 天顶点的度盘位置

可知，天顶距为

$$z = L - M_z. \quad (15.32)$$

M_z 可能大于 0° ，譬如 1° ；也可能不足 0° ，如 358° ，在此情况下，需在读数 L 上加 360° 再减去 M_z ，方可得目标的天顶距。为方便起见，统一规定：如果 M_z 大于 0° ，一律记为 360° ，

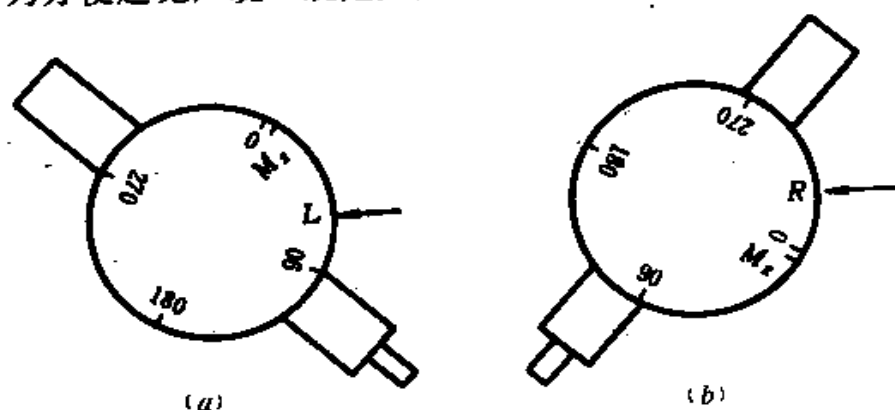


图 15.12 天顶点的测定

361° 等。这样(15.32)式应改写为

$$z = L + 360^\circ - M_z. \quad (15.33)$$

同样, 在盘右观测的情况下, 如目标的垂直度盘读数为 R , 由图 15.12 b 可得

$$z = M_z - R. \quad (15.34)$$

合并(15.33)和(15.34)式, 可得计算 M_z 的公式为

$$M_z = \frac{1}{2}(L + R + 360^\circ). \quad (15.35)$$

知道了天顶点 M_z 后, 就可分别按盘左或盘右的读数, 用(15.33)或(15.34)式来计算目标的观测天顶距。

§ 15.8 天文点的测定方法

一、观测的最有利条件

把(15.30)式代入(15.29)式中, 可得

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (T + u - \alpha). \quad (15.36)$$

这就是测量恒星天顶距定天文点的基本公式。

在(15.36)式中, 观测量是 z 和 T , 必然存在观测误差 Δz 和 ΔT ; 另外, 钟差 u (假定为已知) 也可能存在误差 Δu 。在 Δz , ΔT 和 Δu 的影响下, 如何组织观测才能使测定 φ 的精度更高呢?

求(15.36)式的微分, 并用增量代替微分。若把 α 和 δ 视为精确值, 运用天文三角形的正弦公式和五元素公式并经变换后, 则可得

$$\Delta z = \cos A \Delta \varphi + \cos \varphi \sin A (\Delta T + \Delta u). \quad (15.37)$$

由此可得观测的最有利条件的关系式

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\cos A} \Delta z - \cos \varphi \operatorname{tg} A (\Delta T + \Delta u). \quad (15.38)$$

由(15.38)式可知, 当 $A=0^\circ$ 或 180° 时, 即观测中天的恒星, $(\Delta T + \Delta u)$ 对 $\Delta\varphi$ 没有影响, 同时 Δz 的影响也最小。

在实际观测中, 并不要求严格遵从观测的最有利条件。此时, 北极星将是一个适宜于测纬的天体, 它在任一时刻都离子午圈很近, 而且在北半球全夜可见, 再加上北极星易于辨认, 给观测工作带来了很大方便。

二、测定北极星的高度求纬度

图 15.13 是北极星的天文三角形。 $P\sigma = 90^\circ - \delta = p$, 称为北极星的极距; 这里, 规定方位角 A 自北点起逆时针量度。

显而易见, σ 距 P 甚近, 极距 p 为小量, 故 $PZ\sigma$ 是窄三角形。利用球面三角学的五元素公式可得

$$\begin{aligned} \sin p \cos t &= \cos z \sin(90^\circ - \varphi) \\ &\quad - \sin z \cos(90^\circ - \varphi) \cos A, \end{aligned} \quad (15.39)$$

再利用恒等式 $\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$ 以及和差化积公式, 可将(15.39)式化为

$$\sin p \cos t = \sin(90^\circ - \varphi - z) + 2 \sin z \sin \varphi \sin^2 \frac{A}{2}. \quad (15.40)$$

式中 p , A 以及 $(90^\circ - \varphi - z)$ 均为小量。根据窄三角形的正弦公式, 有

$$A = p \frac{\sin t}{\sin z}. \quad (15.41)$$

将(15.41)式代入(15.40)式中, 并考虑到 p 和 $(90^\circ - \varphi - z)$ 均为小量, 以弧度为单位表示 p , φ , z , 可得

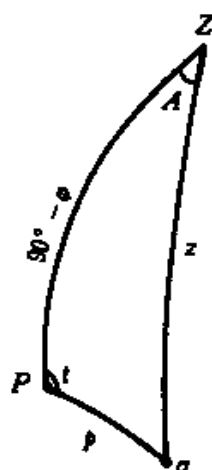


图 15.13 观测北极星求纬度

$$\frac{\pi}{2} - \varphi - z = p \cos t - \frac{1}{2} p^2 \sin^2 t \frac{\sin \varphi}{\sin z}. \quad (15.42)$$

由于 $\sin \varphi = \cos(90^\circ - \varphi) \approx \cos z$, (15.42) 式可改写为

$$\frac{\pi}{2} - \varphi - z = p \cos t - \frac{1}{2} p^2 \sin^2 t \operatorname{ctg} z. \quad (15.43)$$

将 (15.43) 式中的 p 换成以角秒为单位, φ 和 z 亦由弧度化为角度, 并记 $h = 90^\circ - z$, 最后得

$$\varphi = h - p'' \cos t + \frac{1}{2 \times 206265''} (p'')^2 \sin^2 t \operatorname{tg} h. \quad (15.44)$$

为了简化计算, 在《中国天文年历》中, 刊有“从北极星高度求纬度表”。为了制表的需要, 把 (15.44) 式右端的第二、三两项变换为三项, 分别记为 I, II, III. (15.44) 式变为

$$\varphi = h + \text{I} + \text{II} + \text{III}. \quad (15.45)$$

(15.45) 式中的 I, II, III 各编一张表, I 和 II 项与观测日期无关, 即按下式制表

$$\text{I} = -p_0'' \cos(s - \alpha_0),$$

$$\text{II} = \frac{1}{2 \times 206265''} (p_0'')^2 \sin^2(s - \alpha_0) \operatorname{tg} h.$$

式中 s 为观测恒星时, α_0 和 p_0 为北极星星位的近似值。

第三表是观测日期的改正值, 制表用公式为

$$\text{III} = -\frac{15}{206265''} p_0'' \sin(s - \alpha_0) \Delta \alpha'' + \cos(s - \alpha_0) \Delta \delta_0''.$$

式中 $\Delta \alpha_0 = \alpha - \alpha_0$, $\Delta \delta_0 = p_0 - p$, 而 α 和 p 为观测日期的北极星星位。

使用天文年历中的“从北极星高度求纬度表”时, 必须先将北极星的观测高度加上大气折射化为真高度 h 。以观测恒星时 s 为引数, 从第一表查出改正值 I; 以恒星时 s 和高度 h 为引数, 在第二表找出改正值 II; 再以恒星时 s 和观测日期为引数, 从第三

表查得改正值 III 。真高度 h 与这三项改正值的代数和即为观测地点的纬度。

三、钟差和经度的测定

根据 (15.37) 式可以得出测定钟差 u 的最有利条件——观测过卯酉圈的恒星。实际上, 只要观测距卯酉圈 $\pm 30^\circ$ 以内的恒星, 就能保证以足够的精度测时。

更经常用来测时的方法是多星等高法, 将在 § 15.10 中叙述。

现在来讨论经度的测定, 设某一观测地点的经度为 λ , 则有

$$\lambda = s - S_0. \quad (15.46)$$

式中 s 为地方恒星时, $s = T + u$; S_0 为同一瞬间的格林尼治恒星时。

S_0 需通过收录无线电时号而求出。在测时前后的 T_1 和 T_2 时刻, 收录两次时号, 可求得天文钟对于格林尼治恒星时的钟差 U_1 和 U_2 , 于是钟速 ω 等于

$$\omega = \frac{U_2 - U_1}{T_2 - T_1}. \quad (15.47)$$

利用钟速 ω 可计算出 T 时刻的格林尼治恒星时的钟差 U_0 :

$$U_0 = U_1 + \omega (T - T_1). \quad (15.48)$$

于是, 有

$$S_0 = T + U_0. \quad (15.49)$$

将 (15.49) 式代入 (15.46) 式中, 最后得:

$$\lambda = u - U_0. \quad (15.50)$$

四、观测北极星确定子午线方向

从图 15.14 可以看出, 如果某一地面目标 M 的方位角 A_M 已知, 把望远镜指向 M 并读取水平度盘读数 R_M , 逆时针旋转整

个仪器，使水平度盘读数移到

$$R_N = R_M - A_M. \quad (15.51)$$

这时，视线已指向正北点，而视线绕水平轴旋转所描绘的平面就是子午面。

但是，地面目标方位角的测定必须借助于天文观测，先测出一颗天体 σ 在某时刻的方位角 A_σ ，同时读取水平度盘读数 R 。显然有

$$A_M = A_\sigma + (R_M - R). \quad (15.52)$$

也就是说，确定子午线方向的问题实际上就是测定天体方位角的问题。

天体方位角的测定是天文观测中一个较困难的课题，观测结果的计算也较复杂。理论分析表明，为了迅速而简便地确定子午线方向，北极星是一颗非常适宜的天体。

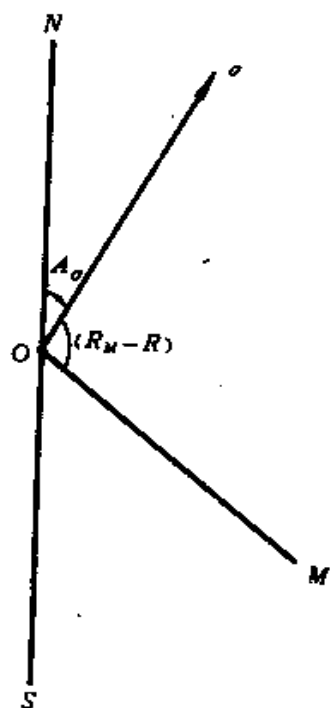


图 15.14 子午线方向的确定

为了满足确定子午线方向的一般需要，在《中国天文年历》中，编算了“北极星高度和方位角”表。根据观测地点的纬度和地方恒星时，很容易查表求出北极星的方位角。

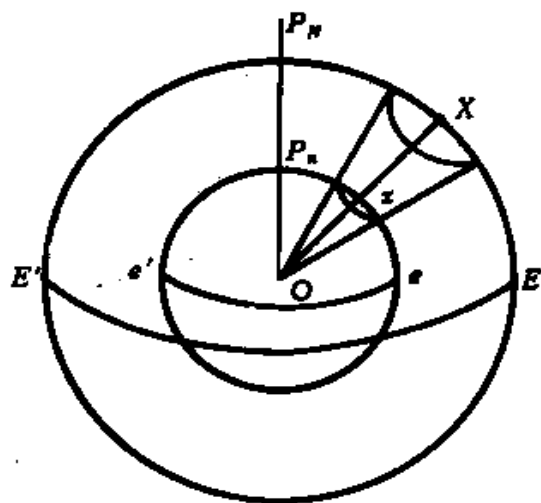
知道了北极星的方位角 A_N 以后，根据这时的水平度盘读数 R ，将整个仪器按与 A_N 量度方向相反的方向转过一个角度 $(R - A_N)$ ，这时望远镜已指向正北点，而子午线的方向也就确定了。

§ 15.9 天文定位在航海中的应用

一、天文导航原理

通过观测天体来测定航行中的舰船的位置，称为天文导航。

天文导航的原理如图 15.15 所示。图中用内圆表示地球，外圆为地心天球。 P_N 和 P_n 分别为天极和地极， EE' 和 ee' 分别为天赤道和地球赤道。假设天体位于天球上 X 点，作 XO 连线与地面相交于 x 点，称为星下点。



• 图 15.15 天文导航的原理

观测者测出某天体的高度为 h ，这时观测者应位于以 x 为圆心，以 $90^\circ - h$ 为半径的小圆上。如

果再观测另一颗天体（星下点为 x_1 ），测得高度为 h_1 ，同样以 x_1 为圆心，以 $90^\circ - h_1$ 为半径作一小圆，则观测者必定也在此小圆上。这两个小圆称为船位圆。

通常，两船位圆有两个交点，其中一个就是舰船的位置。根据舰船的航向和航速推算出粗略船位后，就可以判断出舰船到底位于哪个交点处。

在实际工作中，不必画出整个船位圆，只需画出交点附近一小段弧即可。由于船位圆的半径很大，交点附近的小弧段可以近似用直线来代替，此直线通常称为位置线。测出某些天体的高度以后，在海图上画出位置线，就可以迅速确定舰船的位置。

二、六分仪的构造和使用

在运动物体上测定天体的高度，常用轻便的、可握在手中进行观测的专用仪器，称为六分仪（图 15.16）。

六分仪是一种小型的测角仪器，用它迅速地测出位于任



图 15.16 六分仪

意平面上两目标间的夹角。它的主要部件是刻度弧(长度约为圆周的 $1/6$)，指标杆，动镜，固定镜，以及望远镜等。另外还装有一个把手，以便观测者握在手中观测。

刻度弧上标有刻度，是六分仪的测角度盘。读角用的游标装在指标杆上，指标杆可沿刻度弧随意滑动。动镜位于刻度弧的刻度中心处，固定在指标杆上，可随指标杆转动，它是一面反射镜。固定镜装在望远镜物镜的前面，与望远镜光轴约成 75° 的夹角；它分成两半，一半是反射镜，一半是透明的。

用六分仪测量两目标间的夹角时，应使刻度弧平面平行于两目标所在的平面。图 15.17 中 S 和 H 为两个所要观测的目标。先将望远镜直接瞄准目标 H ，然后转动指标杆，直到另一目标

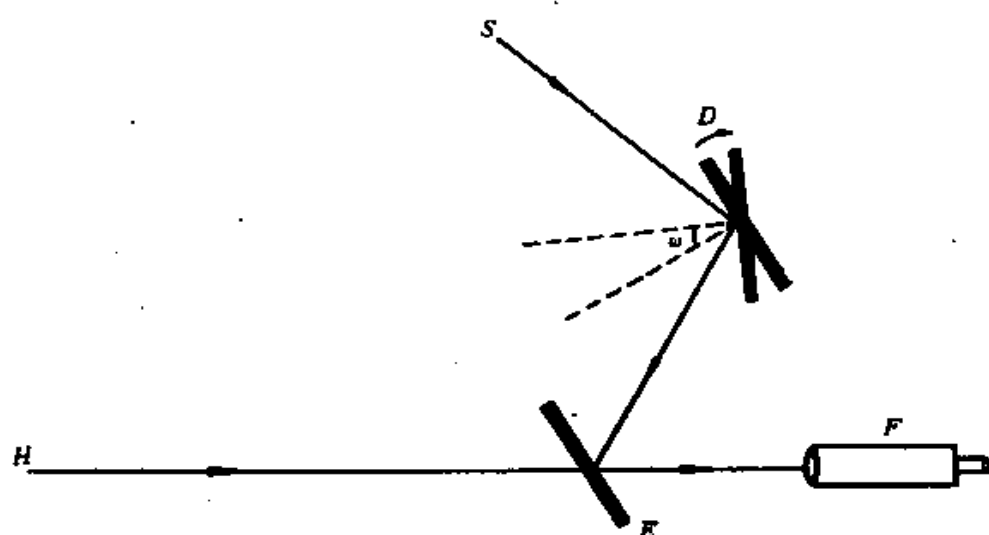


图 15.17 六分仪测角原理

S 经动镜 D 反射到固定镜 E ，再经 E 镜的反射面而后进入望远镜 F 的视场，并与目标 H 的像重合。显然，动镜 D 所转过的角度 ω 等于 S 和 H 间夹角的一半。为方便起见，六分仪刻度弧上的注字一律加倍，这样就可直接读出 S 和 H 间夹角的度数了。

在海上测定天体的高度时，先用望远镜瞄准水天交界线（相当于上面提到的目标 H ），转动指标杆将天体的像（相当于目标 S ）导入视场，并使其恰好与水天交界线重合，从刻度弧读出的角度就是天体的高度。

§ 15.10 多星等高法同时测定经度和纬度

一、原理

观测一组（ n 颗）过同一等高圈的恒星，记录观测时刻 $T_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，根据方程组

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta_i + \cos \varphi \cos \delta_i \cos (T_i + u - \alpha_i), \quad (15.53)$$

可以同时求解出 φ 和 u ，这就是多星等高法同时测定经纬度的基本原理。

多星等高法的设想, 最早是高斯在 1808 年提出的, 直至二十世纪初设计成功专供等高观测的 60° 棱镜等高仪(参看 § 3.5 的图 3.35)以后, 多星等高法才得以流行起来。

二、纬度和钟差的解算方法

现在介绍解算 φ 和 u 的具体方法。假定已知 (15.53) 式中未知量 φ , u 和 z 的近似值 φ_0 , u_0 和 z_0 , 引入

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi - \varphi_0, \\ \Delta u &= u - u_0, \\ \Delta z &= z - z_0. \end{aligned} \right\} \quad (15.54)$$

利用 φ_0 , u_0 , 及观测时刻 T_i , 按 (15.53) 式可得计算天顶距 ξ_i :

$$\cos \xi_i = \sin \varphi_0 \sin \delta_i + \cos \varphi_0 \cos \delta_i \cos (T_i + u_0 - \alpha_i). \quad (15.55)$$

(15.53) 式减去 (15.55) 式, 并考虑到 $\Delta\varphi$, Δu 和 Δz 均为小量, 忽略二阶以上的小量后有

$$\begin{aligned} & -(z_0 + \Delta z - \xi_i) \sin \xi_i \\ &= \Delta\varphi [\cos \varphi_0 \sin \delta_i - \sin \varphi_0 \cos \delta_i \cos (T_i + u_0 - \alpha_i)] \\ & \quad - \Delta u \cos \varphi_0 \cos \delta_i \sin (T_i + u_0 - \alpha_i). \end{aligned} \quad (15.56)$$

写出天文三角形的基本公式:

$$\left. \begin{aligned} -\sin \xi_i \cos A_i &= \cos \varphi_0 \sin \delta_i \\ & \quad - \sin \varphi_0 \cos \delta_i \cos (T_i + u_0 - \alpha_i), \\ \sin \xi_i \sin A_i &= \cos \delta_i \sin (T_i + u_0 - \alpha_i). \end{aligned} \right\} \quad (15.57)$$

式中 A_i 为恒星的方位角。据 (15.57) 式可将 (15.56) 式化为

$$\Delta\varphi \cos A_i + \Delta u \cos \varphi_0 \sin A_i = \Delta z + z_0 - \xi_i. \quad (15.58)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= x, \\ \Delta u \cos \varphi_0 &= y, \\ z_0 - \xi_i &= L. \end{aligned} \right\} \quad (15.59)$$

最后可写出线性化的观测方程

$$x \cos A_i + y \sin A_i - \Delta z = L. \quad (15.60)$$

用最小二乘法求解方程组(15.60)式后,可得 $\Delta\varphi$, Δu 和 Δz , 从而求得 φ 和 u 的精确值。

进一步的理论分析表明,当所观测的 n 颗恒星按方位角均匀分布,并且相对于子午圈和卯酉圈均为对称的时候,所求出的经纬度的精度最高。

多星等高法的测纬精度可达 $\pm 0.15''$, 测时精度达 $\pm 0.01^s$, 完全能满足天文点测定的精度要求,因此是一种在实际工作中被广泛应用的测定方法。

三、观测仪器

本世纪初设计成功专供等高观测用的 60° 棱镜等高仪;1930年又出现了 45° 棱镜等高仪。在天文大地测量工作中,常在天文经纬仪上配用等高附件——棱镜和水银盘(图 15.18),用来进行等高观测。

到了本世纪 50 年代,法国天文学家研制成超人差棱镜等高仪(参看 § 3.5 的图 3.35),由于在望远镜光路系统中加装了一个特殊的光学零件——双折射棱镜,实现了一颗恒星观测的多次记录,从而克服了经典棱镜等高仪只有一次记录的缺点,使等高观测的精度大幅度提高。在天体测量光学观测仪器中,超人差棱镜等高仪可与光电中星仪、照相天顶筒媲美。

我国于 1971 年和 1974 年相继研制成功了 I 型和 II 型光电等高仪,把等高方法的应用提高到一个新的水平,有关这种新型

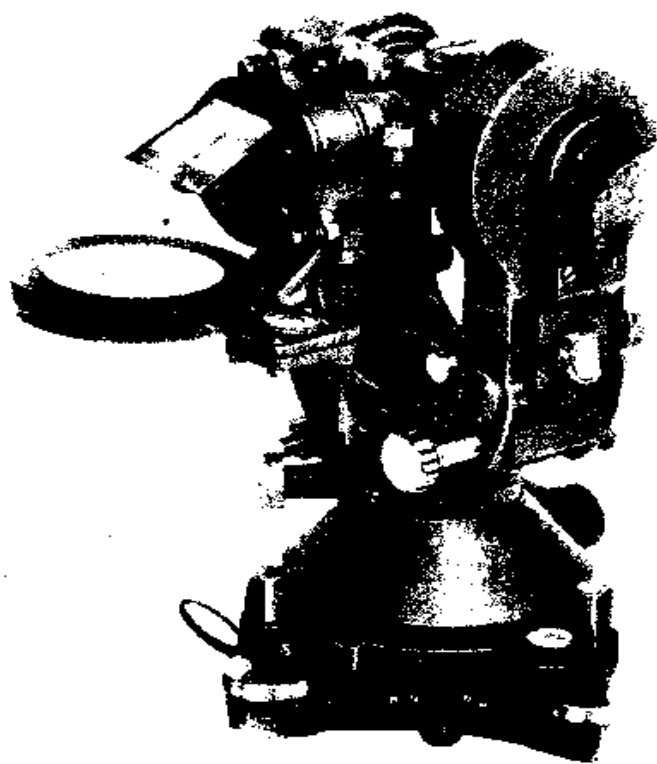


图 15.18 装有等高附件的天文经纬仪

等高仪的详情可参阅专著①。

① 李东明等,《等高方法及其在基本天体测量中的应用》,科学出版社,1983年,第二章。

第十六章 二 体 问 题

天体力学是应用力学的普遍定律来研究引力作用下天体的运动和形状的科学。天体力学中最简单、解决得最彻底的是二体问题。它也是天体力学中讨论其他问题的基础。本章简要地介绍二体问题及其应用。

§ 16.1 开普勒定律和万有引力定律

一、开普勒定律

从远古至中世纪，对于一个物体为什么会运动这个问题一直有着许多含混不清的概念，当时的主要错误是认为物体只有在上帝永恒力的推动下才能运动。十六世纪，伽利略 (G. Galileo) 根据大量的落体实验结果提出，引起物体的加速度或运动变化的根本原因是物体受力的作用，由此，他提出了确定落体轨道的伽利略定律。与此同时，丹麦天文学家第谷 (Tycho Brahe) 从事了几十年的大行星观测工作，积累了大量的资料，他的助手开普勒 (J. Kepler) 对这些丰富的资料进行了严格的归算和分析，经过了十多年的刻苦研究，终于在 1609—1619 年先后归纳出了描述行星运动规律三条经验定律——开普勒三大定律：

第一定律：行星绕太阳运动的轨道是椭圆，太阳位于此椭圆的一个焦点上。

第二定律：行星在椭圆轨道上运动时，其向径扫过的面积与经过的时间成正比。

第三定律：行星绕太阳公转的恒星周期的平方，与行星椭圆轨道半长径的立方成正比。

这三条定律在当时深刻地揭示了行星运动的特征，有力地推动了天文学和力学的发展。

二、牛顿万有引力定律

开普勒定律在当时已能成功地解释所得的观测事实，但随着望远镜的发明，观测精度的提高，仅从行星运动形态上总结出的开普勒定律无法完满地解释行星运动的精确变化和内在本质。英国天才的科学家牛顿在伽利略和惠更斯所建立的运动定律基础上提出了力学的三大基本定律：

(1) 在无外力的情况下，静止的物体永远静止，作直线运动的物体恒作匀速直线运动。

(2) 一个力沿着该力的方向使物体所产生的加速度正比于力的大小，反比于物体的质量，即

$$F = ma.$$

其中 m 为物体质量， a 为力 F 使物体产生的加速度。

(3) 对应于作用在物体上的每一个作用力，有一个大小相等而方向相反的反作用力，作用在提供作用力的物体上。

1685 年牛顿又将力学三大基本定律与开普勒的经验定律相结合进行深入的分析 and 推演，最终归纳出著名的牛顿万有引力定律。

质量为 m 和 m' 的任意两个质点沿其连线方向相互吸引，引力的大小与两质点的质量乘积成正比，与它们之间的距离 r 的平方成反比。

牛顿万有引力定律的数学表示形式为

$$F = G \frac{mm'}{r^2} \cdot \frac{r}{r}, \quad (16.1)$$

其中 G 是比例常数, 称为万有引力常数。

三、从开普勒三定律到牛顿万有引力定律

根据开普勒行星运动三大定律和牛顿力学三定律, 应用高等数学的知识, 可以具体推导出牛顿万有引力定律, 从而更进一步了解牛顿万有引力定律的深刻含义。

首先, 根据开普勒第二定律和牛顿第二运动定律来得出行星所受力的方向和力与行星运动轨道之间的关系。

按照开普勒第一定律, 行星绕太阳运动的轨道是一个椭圆, 因此, 行星的运动轨道应当保持在一个平面上。为了方便起见, 在讨论行星运动时, 可以选取以太阳 S 为原点的平面极坐标系 (见图 16.1)。 r 为行星的向径, θ 为极角, 太阳和行星的质量分别为 M 和 m 。由开普勒第二定律知, 行星向径扫过的面积与经过的时间成正比, 因此, 单位时间内行星向径所扫过的面积相等, 即面

积速度 $\frac{dA}{dt} = \text{常数}$ 。

如图 16.1 所示, 设在 t_1 时刻行星位于轨道上的 P_1 点, 经 Δt 时间间隔后行星位于 P_2 点, 它们对太阳所张的角为 $\Delta\theta$ 。则在 Δt 时间内行星向径所扫过的面积 ΔA 与扇形 SP_1P_2 和 $SP_1'P_2$ 的面积之间有不等式:

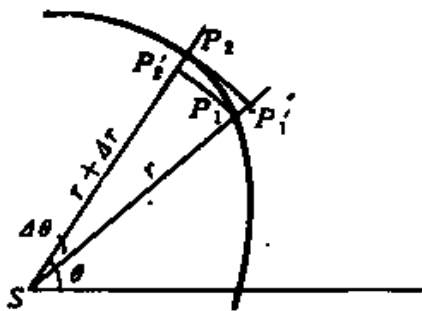


图 16.1 推导 (16.2) 式的示意图

$$\frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \Delta\theta > \Delta A > \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta.$$

因此 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right] \geq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \geq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right)$,

即

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (16.2)$$

(16.2)式表示 $r^2 \dot{\theta}$ 等于面积速度的两倍, 根据开普勒第二定律, $r^2 \dot{\theta} = h$ (常数), h 通常称为面积速度常数。

牛顿第二运动定律在极坐标系中可表示为

$$m(\ddot{r}\theta - r\dot{\theta}^2) = F_r, \quad (16.3)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta. \quad (16.4)$$

(16.4)式可重写为

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = F_\theta.$$

用 $r^2 \dot{\theta} = h$ 代入上式, 则有 $F_\theta = 0$, 显然, 行星所受的垂直于向径方向的力为零, 行星仅受来自于太阳方向的力作用。

作变换 $u = \frac{1}{r}$, 则由 $r^2 \dot{\theta} = h$ 和 (16.1) 式可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= hu^2, \\ \dot{r} &= -h \frac{du}{d\theta}, \\ \ddot{r} &= -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

将 (16.5) 式代入 (16.3) 式消去 $\dot{\theta}$, $\ddot{r}$ 后可

$$F = -mh^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right). \quad (16.6)$$

(16.6) 式称为比尼公式, 它表示力与轨道之间的关系。只要给定行星所受力的形式, 通过解微分方程 (16.6) 式就可以得到 r 与 θ 的关系。反之, 若给定行星运动的轨道形式也可由比尼公式求得

① 本书中用一个量的符号上加一点表示该量对时间的一次导数, 加两点表示该量对时间的二次导数, 等等, 依此类推。

所受力的形式。(16.6)式右端的负号表示行星所受的力是来自太阳方向的吸引力。

根据开普勒第一定律,行星绕太阳运动的轨道是一个椭圆,太阳位于椭圆的一个焦点上。因此,在以太阳为极点的极坐标系内,行星的轨道方程可写为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (16.7)$$

则
$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e \cos \theta}{p}.$$

其中 p , e 为行星轨道的半通径和偏心率,如行星轨道半长径记为 a , 则 $p = a(1 - e^2)$ 。

以(16.7)式代入比尼公式得

$$F = -\frac{mh^2}{p} u^2 = -\frac{m}{r^2} \frac{h^2}{p}. \quad (16.8)$$

上式给出了行星受太阳引力的大小。为进一步确定力 F 的意义,现在再来讨论(16.8)式中 h^2/p 的含义。 h^2/p 是行星轨道要素 a , e 等的函数,对不同的行星它的值是不同的。但根据开普勒第二定律可知, $h = r^2 \dot{\theta} = 2 \frac{dA}{dt}$ 。又对于一个沿椭圆轨道运动的行星,在其运动一周期的时间 T 内它扫过全椭圆面积 πab , 所以

$$h = 2 \frac{\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T}. \quad (16.9)$$

又按开普勒第三定律,行星绕日公转周期的平方与其轨道半长径的立方成正比,即对不同行星而言有

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{常数}.$$

由此可推得

$$\frac{h^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{a(1 - e^2) T^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}. \quad (16.10)$$

$$\mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \quad (16.11)$$

则 μ 为常数, (16.8) 式可改写为

$$F = -\mu \frac{m}{r^2}. \quad (16.12)$$

最后, 根据牛顿运动第三定律可知, 当行星受太阳引力作用时, 太阳也必然受行星的反作用力, 即

$$\frac{\mu m}{r^2} = \frac{\mu' M}{r^2}.$$

M 为太阳质量, μ' 为常数, 由此可将 (16.12) 式改写为

$$F = -G \frac{Mm}{r^2}. \quad (16.13)$$

其中 $G = \frac{\mu}{M} = \frac{\mu'}{m} = \text{常数}$, 称为万有引力常数。

此式表明行星与太阳之间相互吸引, 其引力的方向沿径向, 大小与它们的质量乘积成正比, 与它们之间的距离的平方成反比。

大量实验证明, 宇宙间的物体都存在相互吸引, 它的引力都可以用 (16.13) 式来表示。这就是著名的牛顿万有引力定律。

牛顿万有引力定律中所出现的万有引力常数 G 的值随所选用的计算单位制不同而不同。若用米·千克·秒制, 则

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ 米}^3 \cdot (\text{千克})^{-1} \cdot \text{秒}^{-2}.$$

在天文学中常用天文单位作为长度单位, 太阳质量为质量单位, 平太阳日为时间单位, 则

$$G = k^2,$$

k 称为高斯引力常数, $k = 0.01720209895$ 。

此外, 在理论讨论中为方便起见, 常采用长度和质量单位与上一种相同, 但时间单位为 58.132441 平太阳日, 使得 $G = 1$ 。

§ 16.2 二体问题的运动方程和积分

行星在空间运动所受的力是多种多样的，但相比之下，对于所有的行星来说，太阳的吸引力是主要作用力，因为太阳的质量要比其它行星和卫星的质量大得多。在粗略的讨论中，往往可以忽略其他因素而仅考虑太阳和所讨论的行星之间的相互吸引力。类似地，对于围绕行星旋转的卫星来说，在粗略的讨论中也可以仅考虑行星和该卫星之间的吸引，等等。由此定义：两个可视为质点的天体在相互之间万有引力作用下的动力学问题为二体问题。

二体问题的解可以近似地描述天体运动的真实性，而且几乎所有的天体运动理论都用它作为基本函数，二体问题的解构成了整个太阳系动力学的基础。因此，二体问题在天体力学中占有极其重要的地位。

一、二体的绝对运动和相对运动

设 $O-XYZ$ 为空间惯性直角坐标系，太阳 S 和行星 P 的向

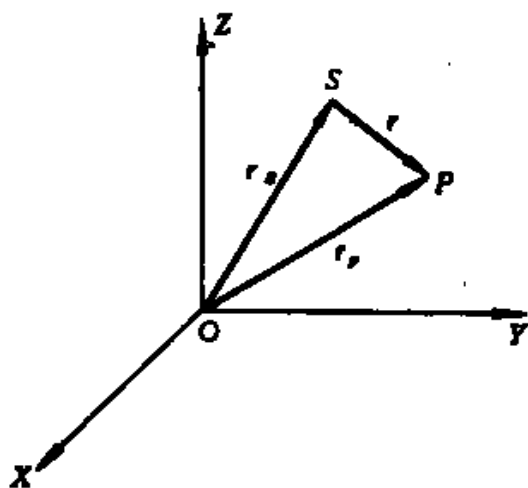


图16.2 二体问题的绝对运动和相对运动

径分别表为 r_S, r_P , 它们的质量分别为 M, m , 它们之间的距离为 r (见图 16.2)。则由牛顿万有引力定律可得太阳在 O -XYZ 系内的运动方程为

$$M \frac{d^2 r_S}{dt^2} = G \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{r}{r}. \quad (16.14)$$

由作用力与反作用力定律, 行星 P 在 O -XYZ 系内的运动方程为

$$m \frac{d^2 r_P}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{r}{r}. \quad (16.15)$$

为讨论行星相对于太阳的运动, 将绝对坐标系 O -XYZ 平移为以太阳 S 为原点的相对直角坐标系 S -XYZ。

由 (16.14) 式和 (16.15) 式可得

$$\left(\frac{d^2 r_P}{dt^2} - \frac{d^2 r_S}{dt^2} \right) = -G(M+m) \frac{r}{r^3}.$$

在 S -XYZ 系中 $r = r_P - r_S$, 并令 $\mu = G(M+m)$, 则上式改为

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{r}{r}. \quad (16.16)$$

上式写成三分量的形式为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} x &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} y &= 0, \\ \ddot{z} + \frac{\mu}{r^3} z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.17)$$

(16.16) 式或 (16.17) 式即为行星相对于太阳的运动方程, 在今后的讨论中都采用这种方程。

在上节推导开普勒第三定律时引进了 $\mu = GM$ 这个常数, 而在推导 (16.16) 式时又定义 $\mu = G(M+m)$ 。实质上, 这两个 μ 的

力学含义是相同的，其差别是由于在上节的推导中假定太阳是静止不动的。显然，考虑到太阳运动时， μ 不是常数，它与各行星的质量有关。因此只有在 $m \ll M$ 时， $\mu = GM$ 才近似成立，这一点是通过二体问题的讨论而发现的对开普勒第三定律的修正。但是，由于行星的质量远远小于太阳的质量，在开普勒时代因为观测技术和水平的限制不可能发现这样微小的偏差，所以开普勒第三定律在当时来说仍是十分有用的，在天文学上并不失其重要性。

二、二体问题的积分

在二体问题中，行星实质上是在以太阳为力心的有心力场中运动，因此有关有心力的结果都能应用。在有心力场中，二体问题存在以下的积分：

1. 动量矩积分 在有心力场中，系统的动量矩守恒。设 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 、 $\mathbf{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 和 $\mathbf{h}(A, B, C)$ 分别为行星在 S -XYZ 系中的坐标、速度和动量矩矢量，则由动量矩守恒原理得

$$m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m\mathbf{h}. \quad (16.18)$$

两边消去质量 m ，写成三分量的形式

$$\left. \begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= A, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= B, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= C. \end{aligned} \right\} \quad (16.19)$$

其中 $\mathbf{h}$ 为常矢量，它的三个分量 A, B, C 为三个积分常数。将 (16.19) 式的第一式乘以 x ，第二式乘以 y ，第三式乘以 z 而后三式相加得

$$Ax + By + Cz = 0. \quad (16.20)$$

这是一个通过原点的平面方程。这说明，在太阳的有心力作用下行星的运动轨道位于一个通过太阳的平面上。因此，可用平面极

坐标。设行星在轨道平面上运动，其速度 v 的二个分量为 $\dot{r}$, $r\dot{\theta}$ ，动量矩积分(16.18)式可写为

$$r\mathbf{r}^0 \times (\dot{r}\mathbf{r}^0 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}^0) = h.$$

其中 $\mathbf{r}^0$, $\boldsymbol{\theta}^0$ 为径向和横向的单位矢量， h 垂直于轨道平面，由上式可得

$$r^2\dot{\theta} = h. \quad (16.21)$$

由(16.2)式知， $r^2\dot{\theta}$ 为面积速度的两倍，称 h 为动量矩积分常数，又称为面积速度常数。因此，动量矩积分(16.18)式或(16.19)式又称为面积积分。

2. 轨道积分 行星保持在一个平面上运动，为简便起见，建立以太阳为原点的轨道平面直角坐标系 $S-XY$ ， XY 平面与行星轨道平面重合，行星运动方程可表为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu}{r^3}x &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3}y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.22)$$

用平面极坐标表示，以 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 代入上式得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -\frac{\mu}{r^2}, \\ r^2\dot{\theta} &= h. \end{aligned} \right\} \quad (16.23)$$

(16.23)式表明行星仅受太阳的引力作用，力的大小为 $\frac{\mu m}{r^2}$ ，以此力代入 § 16.1 中的比尼公式即有

$$-mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\mu mu^2.$$

这里， $u = \frac{1}{r}$ ，简化后可得

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\mu}{h^2}. \quad (16.24)$$

上式是一个 u 对自变量 θ 的二阶微分方程，它的通解形式为

$$u = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \omega)].$$

由(16.10)式和(16.11)式知

$$\mu = \frac{h^2}{p},$$

故有

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}. \quad (16.25)$$

其中 e, ω 为两个新的积分常数。(16.25)式即为行星运动的轨道方程。根据解析几何的知识可看出，这是一个以原点为焦点的圆锥曲线方程， e 为偏心率， p 为半通径， a 表示轨道半长径，因此， $p = a(1 - e^2)$ 。

3. 能量积分 按照有心力场的能量守恒原理，二体问题也存在能量积分。将运动方程(16.22)式的第一式乘以 $\dot{x}$ ，第二式乘以 $\dot{y}$ ，两式相加得

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\mu \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r^3} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right).$$

对上式两边积分得

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{\mu}{r} + c.$$

再对上式两边乘以行量质量 m ，即有

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{\mu m}{r} = E. \quad (16.26)$$

(16.26)式为二体问题的能量积分， E 为能量积分常数。但是， E 不是新的积分常数，可以证明， E 与面积积分常数 h 和半通径 p 等有关。

(16.26)式可以改写为极坐标表示形式

$$\frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] - \frac{\mu m}{r} = E.$$

用轨道近日点处的坐标 $r=a(1-e)$, 速度 $\dot{r}=0$ 以及面积积分 $r^2\dot{\theta}=h$ 代入上式得

$$E = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\mu m}{r} = \frac{m h^2}{2 r^2} - \frac{\mu m}{r}.$$

再利用关系式 $h^2 = \mu p = \mu a(1-e^2)$, 上式化为

$$E = \frac{m \mu a(1-e^2)}{2 a^2(1-e)^2} - \frac{\mu m}{a(1-e)} = -\frac{\mu m}{2a}. \quad (16.27)$$

显然, E 与 a 有关。将上式代入(16.26)式, 能量积分可写为

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (16.28)$$

(16.28)式在天体力学中常称为活力公式。

三、积分常数的轨道意义

上面已得出了五个独立的积分常数及其相应的积分(16.18)式和(16.25)式, 在这两个积分中都不显含时间 t 。由于二体问题的运动方程(16.16)式为三个二阶的微分方程, 其完全解必须包含六个独立的积分常数, 故至此还必须得出另一个新的独立积分, 这个积分应该显含时间 t 且与行星在轨道上的运动有关。为了得出这个积分, 先对已知的五个积分常数的轨道意义进行讨论并得出一些有用的关系式, 在下节中, 再推出另一个新积分。

先讨论动量矩矢量 h 的三分量 A, B, C 的轨道意义。由于动量矩矢量 h 是沿着行星运动轨道平面法线方向的常矢量, 则轨道平面法线方向在 S - XYZ 系内的方向余弦为

$$\frac{A}{h}, \frac{B}{h}, \frac{C}{h}.$$

为讨论 A, B, C 在天体运动中的实际意义, 如图 16.3 所示, 作日心天球, 取日心黄道直角坐标系为 S - XYZ 系, XY 平面与黄道面重合, X 轴指向春分点, Z 轴指向北黄极, XY 平面与天球

图 16.3 积分常数的轨道意义

$$\cos CX = \frac{A}{h}, \quad \cos CY = \frac{B}{h}, \quad \cos CZ = \frac{C}{h}. \quad (16.29)$$
$$\begin{aligned}\cos CX &= \sin \Omega \sin i, \\ \cos CY &= -\cos \Omega \sin i, \\ \cos CZ &= \cos i.\end{aligned}$$
$$\left. \begin{aligned} A &= h \sin \Omega \sin i, \\ B &= -h \cos \Omega \sin i, \\ C &= h \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (16.30)$$
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Omega &= -\frac{A}{B}, \\ \operatorname{tg} i &= \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C}, \\ h &= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \end{aligned} \right\} \quad (16.31)$$

综上所述, 五个已知的积分常数 A, B, C, e, ω 可用 h, Ω, i, e, ω 来代替, 又因为 $h = \mu p = \mu a(1 - e^2)$, 故一般将五个独立的积分常数记为 a, e, i, Ω, ω , 它们的轨道意义如下:

- a 轨道半长径,
- e 轨道偏心率,
- i 轨道倾角 ($0 \leq i \leq \pi$),
- Ω 轨道升交点黄经 (从春分点起算, 逆时针为正, $0 \leq \Omega \leq 2\pi$),
- ω 轨道近点角距 (从轨道升交点起算, 逆时针为正, $0 \leq \omega \leq 2\pi$).

从几何意义上说, a 和 e 确定了行星轨道的形状和大小, i 和 Ω 确定了行星轨道面在空间的位置, ω 表示轨道升交点与近日点之间的角距离, 也就是确定了行星轨道在轨道平面内的方位。

这五个独立的积分常数和以后将要推出的另一个新积分常数一起构成行星轨道的六个基本要素, 在天体力学中称为轨道要素或轨道根数。

§ 16.3 二体问题的轨道分类

一、二体问题的轨道分类

上节已经得出二体问题的轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}.$$

这是一个圆锥曲线方程, 圆锥曲线包括圆、椭圆、抛物线和双曲线。由此可以从几何性质上来对二体问题的轨道进行分类。

1. 按偏心率 e 分类 圆轨道 $e=0$, 椭圆轨道 $e<1$, 抛物线轨道 $e=1$, 双曲线轨道 $e>1$ 。

2. 按半长径 a 分类 在圆锥曲线中, 半通径 p 为大于或等于零的有限数, 且有关系式 $p=a(1-e^2)$ 。因此, 可以按 e 的变化用轨道半长径 a 来对轨道进行分类: 圆轨道 $a=r$, 椭圆轨道 $a>0$, 抛物线轨道 $a=\infty$, 双曲线轨道 $a<0$ 。

此外, 根据活力公式也可以从动力学性质上来对二体问题的轨道进行分类:

3. 按速度 v 的大小分类 根据活力公式

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

圆轨道 $a=r$, 所以

$$v^2 = v_c^2 = \frac{\mu}{r}. \quad (16.32)$$

v_c 称为距离 r 处的圆轨道速度, 称为环绕速度。

抛物线轨道 $a=\infty$, 此时

$$v^2 = v_p^2 = \frac{2\mu}{r} = 2v_c^2.$$

即

$$v_p = \sqrt{2} v_c. \quad (16.33)$$

v_p 称为距离 r 处的抛物线速度, 也称为逃逸速度或脱离速度。

椭圆轨道 $a>0$, 则有

$$v_m^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) < \frac{2\mu}{r} = v_p^2.$$

即

$$v_m < v_p. \quad (16.34)$$

双曲线轨道 $a<0$, 则有

$$v_u^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) > \frac{2\mu}{r} = v_p^2.$$

即

$$v_u > v_p. \quad (16.35)$$

4. 按总能量 E 的大小分类

由(16.27)式知, 能量积分常数 $E = -\frac{\mu m}{2a}$, 根据不同大小的 a , E 的值也不同。由此可以按 E 的大小分类:

圆轨道和椭圆轨道 $a > 0$, $E < 0$,

抛物线轨道 $a = \infty$, $E = 0$,

双曲线轨道 $a < 0$, $E > 0$.

二、开普勒方程

现在来推导含有第六个独立积分常数的新积分。由于这个积分与行星的轨道运动有关, 故需要按不同类型的轨道来推导。

1. 椭圆轨道 椭圆运动中的动量矩积分和活力公式可写为

$$r^2 \dot{\theta} = h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}. \quad (16.36)$$

$$v^2 = [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (16.37)$$

将(16.36)式代入(16.37)式可得

$$\dot{r}^2 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 = \dot{r}^2 + \frac{\mu a(1-e^2)}{r^2} = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

因此

$$\dot{r}^2 = \frac{\mu}{r^2 a} [a^2 e^2 - (a-r)^2]. \quad (16.38)$$

因为 h 为面积速度的两倍, 在椭圆运动中 $h = \frac{2\pi ab}{T}$, T 为行星运动周期, $b = a\sqrt{1-e^2}$ 。由(16.10)式和(16.11)式知

$$\mu = \frac{h^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

令 $n = \frac{2\pi}{T}$ 为行星作椭圆运动时的平均运动角速度, 则

$$\mu = n^2 a^3 \quad (16.39)$$

代入(16.38)式得

$$\dot{r}^2 = \frac{n^2 a^2}{r^2} [a^2 e^2 - (a-r)^2]$$

在椭圆的运动中, 行星的向径和运动速度皆为正量, 因此对上式两边积分后分离变量可得

$$ndt = \frac{rdr}{a\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}} \quad (16.40)$$

根据椭圆轨道的性质应有 $|a-r| \leq ae$ 。为解上述微分方程可作变量变换, 引入参变量 E , 使得

$$a-r = ae \cos E$$

$$\text{即} \quad r = a(1 - e \cos E) \quad (16.41)$$

代入(16.40)式得

$$ndt = (1 - e \cos E) dE$$

两边积分后得

$$E - e \sin E = n(t - \tau) = nt + M_0 \quad (16.42)$$

其中 τ 或 M_0 为新的积分常数, $M_0 = -n\tau$ 。显然, 当 $t = \tau$ 时, $E = 0$, $r = a(1 - e)$, 即行星位于近日点, 因此 τ 称为行星过轨道近日点的时刻。

2. 抛物线轨道 在抛物线轨道中 $e = 1$, $a = \infty$, 设 q 为近日点的日心距, 则 $p = 2q$, 抛物线的轨道方程可表为(见图 16.4):

$$r = \frac{2q}{1 + \cos(\theta - \omega)} \quad (16.43)$$

令 $f = \theta - \omega$, 显然, 当 $f = 0$ 时, 由(16.43)式得 $r = q$, 即行星位于近日点, 故(16.43)式可表为 r 与 f 之间的关系式

$$r = q \sec^2 \frac{f}{2} \quad (16.44)$$

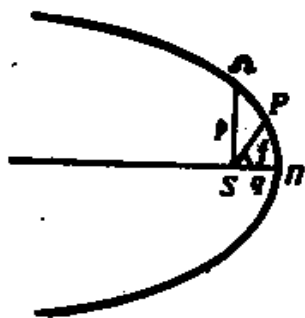


图 16.4 抛物线轨道的轨道方程形式

因为 ω 是轨道根数, 在二体问题中 ω 为常数, 则 $f = \theta$, 代入动量矩积分得

$$r^2 \dot{\theta} = r^2 \dot{f} = \sqrt{\mu p} = \sqrt{2\mu q}$$

故有 $f = \frac{1}{r^2} \sqrt{2\mu q} = \frac{\sqrt{2\mu q}}{q^2 \sec^4 \frac{f}{2}} = \sqrt{2\mu} q^{-\frac{3}{2}} \sec^{-4} \frac{f}{2}$

两边分离变量得

$$\sec^4 \frac{f}{2} df = \sqrt{2\mu} q^{-\frac{3}{2}} dt$$

两边积分, 最终得

$$2 \operatorname{tg} \frac{f}{2} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{f}{2} = \sqrt{2\mu} q^{-\frac{3}{2}} (t - \tau) \quad (16.45)$$

其中 τ 是新积分常数, 当 $t = \tau$ 时, $f = 0$, τ 即为过近日点的时刻, 其含义与椭圆运动中的 τ 相同。

3. 双曲线轨道 在双曲线运动中, $e > 1$, $a < 0$, 往往为方便起见, 令 $a_1 = -a > 0$, 相应的 (16.36) 式和 (16.37) 式也应改为

$$\left. \begin{aligned} r^2 \dot{\theta} &= h = \sqrt{\mu a_1 (e^2 - 1)}, \\ \dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2 &= \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (16.46)$$

将两式互相代换, 消去 θ 后可得

$$a_1 \nu = \frac{r dr}{\sqrt{(a_1 + r)^2 - a_1^2 e^2}}. \quad (16.47)$$

其中 ν 类似于椭圆运动中的平均运动角速度 n , 满足关系式

$$\nu = \sqrt{\mu} a^{-\frac{3}{2}}$$

按照双曲线轨道的几何性质 $|a_1 + r| > a_1 e$, 故可作双曲函数变换, 令

$$a_1 + r = a_1 e \operatorname{ch} F.$$

即

$$r = a_1 (e \operatorname{ch} F - 1). \quad (16.48)$$

以此代入 (16.47) 式后两边积分得

$$e \operatorname{sh} F - F = \nu (t - \tau). \quad (16.49)$$

其中 τ 为积分常数, 当 $t=\tau$ 时, $F=0$, $r=a_1(e-1)$, 即行星过轨道近日点, τ 为过近日点的时刻。

(16.42) 式, (16.45) 式和 (16.49) 式分别表示对应于不同类型二体轨道的最后一个积分, 它显含时间 t , 在天体力学中称为开普勒方程。由于它表征了行星在轨道上运动的性质, 因此在天体力学中占有很重要的地位。

至此, 二体问题的六个轨道根数及其相应的独立积分已全部得出。

§ 16.4 开普勒方程的解法

开普勒方程反映了行星在轨道运动过程中位置与时刻的关系。如果要从已知的天体轨道上计算任意时刻 t 时天体的位置, 首先必须求解开普勒方程。本节中主要阐述开普勒方程的几何意义和解法。

一、开普勒方程的几何意义

现在, 以天体运动中常见的椭圆轨道为例来讨论开普勒方程 $E - e \sin E = n(t - \tau)$ 的几何意义。如图 16.5 所示, 设太阳 S 位在椭圆轨道的一个焦点上, O 为椭圆中心, Π , Π' 为轨道的近日点和远日点。设椭圆的半径 $O\Pi = a$, 则以 a 为半径, O 为圆心, 作一圆, 此圆必然与椭圆轨道在 Π , Π' 处相切, 称此圆为椭圆轨道的外辅圆。从图 16.5 可以看出, 椭圆轨道上的每一点都可以在外辅圆上找到相应的点, 因此, 椭圆可看成是外辅圆的投影。如果在任一时刻 t , 行星位于 P 点, 从 P 作 $O\Pi$ 的垂线 PR 并延长 PR 与外辅圆相交于 P' 点, 显然 P 点是 P' 点在椭圆轨道上的投影。通常定义 $E = \angle P'O\Pi$ 为偏近点角, $f = \angle PS\Pi$ 为

真近点角，下面来证明 E 即开普勒方程(16.42)中的参变量 E 。

据上所述椭圆与外辅圆之间的关系，得

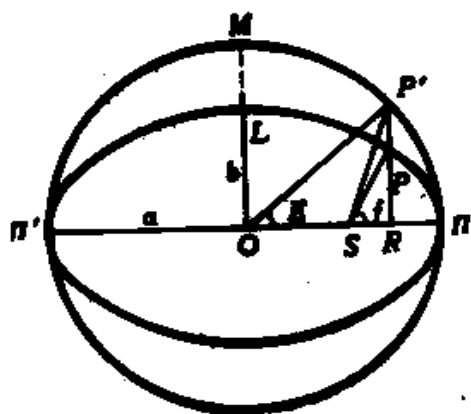


图 16.5 开普勒方程的几何意义

$$\frac{PSn \text{ 面积}}{P'Sn \text{ 面积}} = \frac{\text{椭圆面积}}{\text{外辅圆面积}}$$

若行星从近日点 n 运动至 P 点所需时间为 $t - \tau$ ，运动周期为 T ，则根据开普勒第三定律

$$\frac{t - \tau}{T} = \frac{PSn \text{ 面积}}{\text{椭圆面积}}$$

上两式相比，即有

$$\frac{t - \tau}{T} = \frac{P'Sn \text{ 面积}}{\text{外辅圆面积}} \quad (16.50)$$

从图 16.5 可看出

$$P'Sn \text{ 面积} = \text{扇形 } P'O'n \text{ 面积} - \text{三角形 } P'SO \text{ 面积}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} OS \cdot P'R$$

$$= \frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} a^2 e \sin E$$

$$\text{外辅圆面积} = \pi a^2$$

代入(16.50)式得

$$\frac{t - \tau}{T} = \frac{\frac{1}{2} a^2 (E - e \sin E)}{\pi a^2} = \frac{E - e \sin E}{2\pi}$$

按平均运动角速度 n 的定义， $n = \frac{2\pi}{T}$ ，所以上式变为

$$n(t - \tau) = E - e \sin E$$

上式即为(16.42)式，这就说明开普勒方程中的参变量 E 就是偏近点角。

可以看出, 在近日点处, 偏近点角 $E=0$, 真近点角 $f=0$, 它们都是从近日点起算沿行星运动方向由 0 逐渐增加到 2π 。为了方便地讨论行星的轨道运动, 还引入平近点角 M , 即定义

$$M=n(t-\tau), \quad (16.51)$$

M 表示当行星从近日点起算按平均运动角速度运动至任意时刻 t 时所转过的角度。当 $t=\tau$ 时, $M=0$, 当行星旋转一个周期时, M 从 0 均匀增加到 2π 。当 $t=0$ 时, $M=M_0=-n\tau$, 往往称 M_0 为 $t=0$ 时的平近点角, 有时用 M_0 代替轨道根数 τ , 表示初始时刻的平近点角。

E, f, M 三个近点角在讨论天体运动时起很重要的作用, 它们都是随时间而变化的量, 代表着天体位置和速度的变化, 常用它们来代替时间 t 作为自变量。

二、开普勒方程的解法

开普勒方程是偏近点角 E 的超越方程, 无法直接严格解出而只能用近似的方法求解。开普勒方程的近似解法有多种, 这里只介绍常用的两种方法。

1. 叠代法 由于平近点角 M 的定义, 可以将开普勒方程改写为

$$E - e \sin E = M, \quad (16.52)$$

若已知偏心率 e 和平近点角 M , 当偏心率 e 比较小时, 可将 (16.52) 式化为一系列的叠代公式:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= M, \\ E_2 &= M + e \sin E_1, \\ E_3 &= M + e \sin E_2, \\ E_n &= M + e \sin E_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (16.53)$$

如果计算所需的精度为 ε , 则当 $|E_n - E_{n-1}| \leq \varepsilon$ 时, 就认为 $E =$

E_n 为(16.52)式的解。

在太阳系中大多数天体的轨道的偏心率都比较小, 上述近似过程是合理可行的, (16.53)式的叠代计算过程简单且便于用计算机操作。因此, 叠代法是最常用的一种解法。在计算中, 采用弧度作单位比较方便, 若 E 和 M 都采用角度为单位, 则需将偏心率 e 乘以一弧度的角度数 57.29577591。

2. 微分改正法 若天体的轨道偏心率 e 比较大, 使用叠代法近似的次数需很多, 造成不便。此时常采用叠代法与一阶微分相结合的微分改正法。

将开普勒方程(16.52)式两边取微分

$$(1 - e \cos E) \Delta E = \Delta M.$$

则有

$$\Delta E = \frac{\Delta M}{1 - e \cos E}. \quad (16.54)$$

如果事先已采用叠代法或其他方法求出了偏近点角 E 的近似值 E' 。代入(16.52)式可得

$$M' = E' - e \sin E'.$$

由此求出

$$\Delta M_1 = M - M'. \quad (16.55)$$

代入(16.54)式得到 E 的一次改正值

$$\Delta E_1 = \frac{\Delta M_1}{1 - e \cos E'}$$

进而得 E 的第二次近似值 $E_2 = E' + \Delta E_1$ 。

从而

$$M_2 = E_2 - e \sin E_2,$$

$$\Delta M_2 = M - M_2,$$

$$\Delta E_2 = \frac{\Delta M_2}{1 - e \cos E_2},$$

$$E_3 = E_2 + \Delta E_2,$$

$\vdots$

$$E_n = E_{n-1} + \Delta E_{n-1}.$$

如果 $\Delta M_n \leq \varepsilon$, 则此时所得之 E_n 即为开普勒方程 (16.52) 式的解。微分改正法比叠代法的收敛速度要快些, 因此实际上应用得更广泛些, 特别适用于偏心率大的情况。

§ 16.5 日心黄道直角坐标 和速度的计算

如果已知某行星的轨道根数, 也可以利用二体问题的积分关系式来计算天体的日心黄道直角坐标和速度。

一、轨道直角坐标的计算

1. 椭圆轨道情况 根据上节中真近点角 f 的定义,

$$f = \theta - \omega,$$

于是天体的椭圆轨道方程可写为

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}. \quad (16.56)$$

若以太阳 S 为原点, 在行星轨道平面上建立日心轨道直角坐标系 $S-\zeta\eta$, ζ 轴指向近日点 Π , η 轴与 ζ 轴垂直并成右手正交系。在 t 时刻, 行星位于 P 点, f 为行星 P 的真近点角 (见图 16.6), 则行星的轨道直角坐标 (ζ, η) 与向径 r , 真近点角 f 之间有关系式

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= r \cos f, \\ \eta &= r \sin f. \end{aligned} \right\} \quad (16.57)$$

利用二体问题的关系式, 还可以得出 (ζ, η) 与偏近点角 E 之间的关系。由 (16.56) 式得

$$\zeta = r \cos f = \frac{1}{e} [a(1-e^2) - r].$$

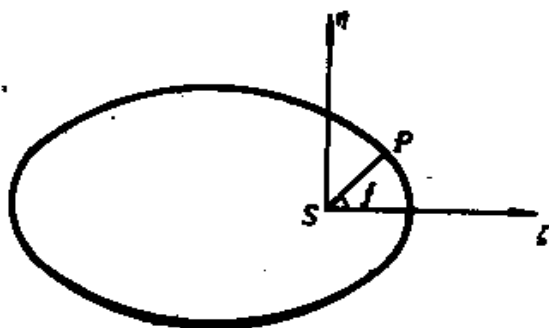


图 16.6 轨道直角坐标系

而由(16.41)式知

$$r = a(1 - e \cos E).$$

代入上式得

$$\xi = r \cos f = a(\cos E - e), \quad (16.58)$$

$$\eta = r \sin f = \pm \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 f} = \pm a \sqrt{1 - e^2} \sin E,$$

按 E , f 的定义, 它们都是从近日点起算, 变化周期为 2π 的角变量, 故当行星从近日点运动到远日点时, E 和 f 都是从 0 增加到 π , 当行星从远日点回到近日点时, E , f 从 π 增加到 2π , 显然, $\sin E$ 和 $\sin f$ 应当同号, 上式取正号, 即

$$\eta = r \sin f = a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (16.59)$$

利用(16.58)式和(16.59)式, 可得到 E 和 f 之间的直接关系式。将 $r = a(1 - e \cos E)$ 代入(16.58)和(16.59)两式, 得到

$$\left. \begin{aligned} \cos f &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \\ \sin f &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}. \end{aligned} \right\} \quad (16.60)$$

反之亦可得

$$\left. \begin{aligned} \cos E &= \frac{\cos f + e}{1 + e \cos f}, \\ \sin E &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin f}{1 + e \cos f}. \end{aligned} \right\} \quad (16.61)$$

由(16.60)式可推得

$$\begin{aligned} 1 + \cos f &= \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E}, \\ 1 - \cos f &= \frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e\cos E}. \end{aligned}$$

两式相除得

$$\operatorname{tg}^2 \frac{f}{2} = \frac{1 - \cos f}{1 + \cos f} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}.$$

两边开方可得

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (16.62)$$

前面已经说明, E 和 f 总是同在第一, 二象限或第三, 四象限, 因此 $\frac{f}{2}, \frac{E}{2}$ 总是同在第一或第二象限, $\operatorname{tg} \frac{f}{2}$ 和 $\operatorname{tg} \frac{E}{2}$ 总保持同号, 故上式两边开方取正号。由(16.62)式可以完全确定 f 和 E 之间的大小和象限关系。

2. 抛物线轨道情况 抛物线轨道的开普勒方程可写为

$$2 \operatorname{tg} \frac{f}{2} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{f}{2} = \sqrt{2\mu} q^{-\frac{3}{2}} (t - \tau).$$

轨道方程为 $r = q \sec^2 \frac{f}{2}.$

如果已知作抛物线运动天体的轨道根数和任一时刻 t , 则通过解抛物线轨道的开普勒方程(此为 $\operatorname{tg} \frac{f}{2}$ 的代数方程)可以得出 t 时刻的真近点角 f , 而后代入抛物线轨道方程即可解出 t 时的向径 r , 再代入轨道直角坐标方程(16.57)式, 最终可得到 t 时刻的轨道直角坐标。

但是, 在抛物线轨道计算中, 必须注意, 当 $t > \tau$ 时, 可直接利用开普勒方程计算 f , 而当 $t < \tau$ 时, 从抛物线轨道开普勒方程看出 $f < 0$, 计算时需加以区分, 往往在抛物线轨道中, f 的取

值范围应为 $-\pi < f < \pi$ 。

3. 双曲线轨道情况 在 §16.3 中推导双曲线轨道的开普勒方程时曾引入辅助量 F ，它满足变换关系

$$r = a_1(e \operatorname{ch} F - 1).$$

从几何意义上来说， F 相当于椭圆运动中的偏近点角 E ，类似于椭圆运动的 (16.58) 和 (16.59) 两式，可以推得

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= r \cos f = a_1(e - \operatorname{ch} F), \\ \eta &= r \sin f = a_1 \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} F. \end{aligned} \right\} \quad (16.63)$$

同样也可得到 f 和 F 之间的直接关系式

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{F}{2}. \quad (16.64)$$

当给出某时刻 t 时作双曲线运动的天体的轨道根数时，可通过解双曲线轨道的开普勒方程 (16.49) 式得出 F ，而后代入 (16.63) 式得到轨道直角坐标 ζ, η 。

二、日心黄道直角坐标和速度的计算

1. 旋转矩阵 在日心黄道直角坐标和速度的计算及大多数天文计算中都要用到坐标系的旋转，而坐标系的旋转又可用矩阵运算表示，称为旋转矩阵。

设空间任一点 P 在直角坐标系 $O-XYZ$ 中的坐标为 (x, y, z) ，如图 16.7 所示，若 X 轴不动， YZ 平面绕 X 轴逆时针方向旋转 θ 角后，所得的新坐标系为 $O-X'Y'Z'$ ， P 点的新坐标记为 (x', y', z') 。由解析几何知识可知新旧坐标之间有下列的关系

$$\left. \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos \theta + z \sin \theta, \\ z' &= -y \sin \theta + z \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (16.65)$$

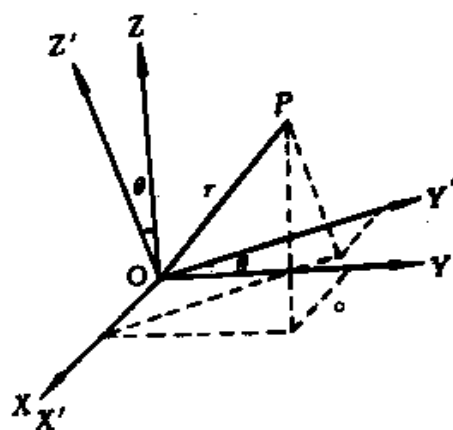


图 16.7 坐标系的旋转

(16.65)式用矩阵运算表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ = R_x(\theta) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (16.66)$$

其中

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (16.67)$$

$R_x(\theta)$ 称为 YZ 平面绕 X 轴逆时针旋转 θ 角的旋转矩阵, 也称为 (16.65)式的系数矩阵。它具有下列性质:

$$\left. \begin{aligned} |R_x(\theta)| &= 1, \\ R_x(0) &= E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_x^{-1}(\theta) &= R_x(-\theta) = R_x^T(\theta), \\ R_x(\theta_1)R_x(\theta_2) &= R_x(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (16.68)$$

同理可得, ZX 平面绕 Y 轴逆时针旋转 θ 角的旋转矩阵为

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (16.69)$$

XY 平面绕 Z 轴逆时针旋转 θ 角的旋转矩阵为

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16.70)$$

显然, $R_y(\theta)$ 和 $R_z(\theta)$ 都具有 (16.68) 式所列的性质, 只是必须注意下面的运算规则:

$$\left. \begin{aligned} R_x(\theta_1) \cdot R_x(\theta_2) &= R_x(\theta_2) \cdot R_x(\theta_1), \\ R_x(\theta_1) \cdot R_y(\theta_2) &\neq R_y(\theta_2) \cdot R_x(\theta_1). \end{aligned} \right\} \quad (16.71)$$

其余的运算可依此类推。

如果将坐标系按顺时针方向旋转 θ 角, 则只需将上列旋转矩阵 (16.67), (16.69) 和 (16.70) 三式中的 θ 改为 $-\theta$, 就可得到相应的旋转矩阵。

2. 日心黄道直角坐标和速度的计算 现在仅以椭圆运动为例来讨论天体的日心黄道直角坐标和速度的计算。

首先作日心天球, 大圆 XNY 为黄道面与天球的截线 XY 平面为黄道面, X 轴指向某历元时刻的春分点, 大圆 $P\Pi N$ 为行星轨道在天球上的投影, N 为轨道升交点, Π 为轨道近日点方向在天球上的投影, P 为行星在任意时刻 t 时在轨道上的位置, 显然有

$$\begin{aligned} \widehat{XN} &= \Omega, & N\Pi &= \omega \\ \widehat{\Pi P} &= f, & \angle YN\Pi &= i. \end{aligned}$$

现在, 建立以太阳为原点, 黄道面为 XY 平面的日心黄道直角坐标系 $S-XYZ$, Z 轴指向北黄极。设 t 时刻, 行星的直角坐标为 (x, y, z) , 从图 16.8 可以看出, 将轨道直角坐标系 $S-\xi\eta$

转换为日心黄道直角坐标系 $S-XYZ$ 系是一个坐标系的旋转问题，这个转换可以通过三次旋转来实现。

(1) 若已知行星的轨道根数，可以根据二体问题的关系式和 (16.57) 式得出行星在任意 t 时刻的轨道直角坐标 (ζ, η) 。坐标系 $S-\zeta\eta C$ 为轨道直角坐标系， C 轴沿着轨道平面的法线方向。第一步，可以将 $\zeta\eta$ 平面顺时针方向绕 SC 轴旋转 ω 角，则 $S-\zeta\eta C$ 系就成为 $S-\zeta'\eta' C$ 系， ζ' 轴与 SN 轴重合。

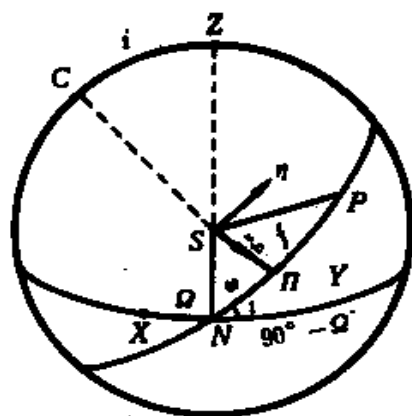


图 16.8 日心黄道直角坐标和速度的计算

(2) 第二步将轨道面绕 ζ' 轴顺时针方向旋转 i 角，使轨道面与黄道面重合， $S-\zeta'\eta' C$ 系转换为 $S-\zeta''\eta'' Z$ 系，此时， ζ'' 轴与 ζ' 轴重合， C 轴与 Z 轴重合。

(3) 最后一次旋转是将 $S-\zeta''\eta'' Z$ 系统绕 Z 轴顺时针方向旋转 Ω 角，最终使得 $S-\zeta''\eta'' Z$ 系与 $S-XYZ$ 系完全重合。

上述三次旋转用矩阵形式表出，即为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z(-\Omega) \cdot R_x(-i) \cdot R_z(-\omega) \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16.72)$$

或

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

矩阵展开运算后可得

$$\left. \begin{aligned} x &= l_1 \zeta + l_2 \eta, \\ y &= m_1 \zeta + m_2 \eta, \\ z &= n_1 \zeta + n_2 \eta. \end{aligned} \right\} \quad (16.73)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i, \\ m_1 &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i, \\ n_1 &= \sin \omega \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (16.74)$$

$$\left. \begin{aligned} l_2 &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i, \\ m_2 &= -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i, \\ n_2 &= \cos \omega \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (16.75)$$

图 16.8 表明, (l_1, m_1, n_1) 和 (l_2, m_2, n_2) 分别为 ζ 轴的单位向量 P 和 η 轴的单位向量 Q 在 S - XYZ 系内的方向余弦, 即 $P = P(l_1, m_1, n_1)$, $Q = Q(l_2, m_2, n_2)$, P, Q 皆为轨道根数 i, ω, Ω 的函数。由此 (16.73) 式可用矢量形式表示为

$$r = \zeta P + \eta Q. \quad (16.76)$$

将 (16.58) 式和 (16.59) 式代入上式得

$$r = a(\cos E - e)P + a\sqrt{1-e^2} \sin E Q. \quad (16.77)$$

(16.77) 式右端仅偏近点角 E 与时间 t 有关, 将 (16.77) 式两边对 t 求导数得

$$\dot{r} = (-a \sin E P + a\sqrt{1-e^2} \cos E Q) \frac{dE}{dt}.$$

根据开普勒方程 (16.42) 式, 对两边求导数可推出

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1-e \cos E} = \frac{an}{r}. \quad (16.78)$$

代入 (16.77) 式即得 t 时刻行星的轨道运动速度

$$\dot{r} = -\frac{a^2 n}{r} \sin E P + \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} \cos E Q. \quad (16.79)$$

写成三分量的形式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{a^2 n}{r} \sin E l_1 + \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} \cos E l_2, \\ \dot{y} &= -\frac{a^2 n}{r} \sin E m_1 + \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} \cos E m_2, \\ \dot{z} &= -\frac{a^2 n}{r} \sin E n_1 + \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} \cos E n_2. \end{aligned} \right\} \quad (16.80)$$

在理论讨论中, 为简便起见, 常利用 $\mu = n^2 a^3$ 这一关系将(16.79)式变换为

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \sin E \mathbf{P} + \frac{\sqrt{\mu P}}{r} \cos E \mathbf{Q}. \quad (16.81)$$

其三分量的形式可类似导出。

对于抛物线轨道和双曲线轨道的坐标和速度也可类似于椭圆轨道的情况推出。

§ 16.6 星历表计算

在实际的天文观测中, 观测者是在地面对行星观测的, 因此, 仅知道天体的日心黄道直角坐标并不能直接用以观测, 而必须给出天体的视位置才能进行观测或与观测所得的位置进行比较。天体的视位置表叫做星历表。编制精确而实用的星历表是天体力学工作的重要任务之一。

本节从二体问题的结果出发, 介绍计算星历表的基本原理和方法。由天体的日心黄道直角坐标计算天体的视位置, 需要经过以下几个计算步骤:

1. 日心黄道直角坐标转换为日心赤道直角坐标 如图 16.9 所示, 设 $S-XYZ$ 系为日心黄道直角坐标系, 行星 P 在此坐标系内的坐标为 (x, y, z) 。又设 $S-X'Y'Z'$ 系为日心赤道直角坐标

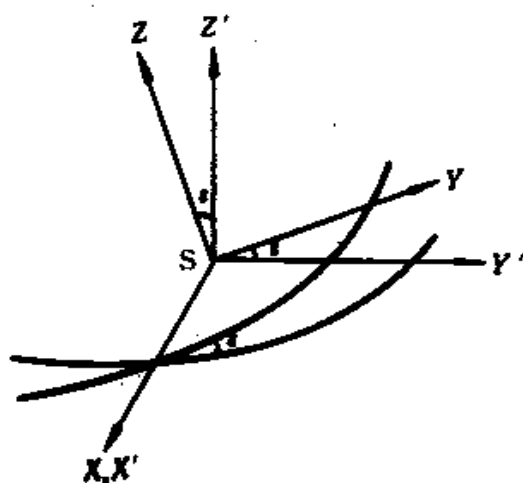


图 16.9 日心黄道坐标系与日心赤道坐标系的转换

系, X' 轴与 X 轴重合, 指向某历元时刻的春分点, $X'Y'$ 平面为某历元时刻的赤道面, Y' 轴在赤道面上与 X' 轴成 90° , Z' 轴指向北天极。黄道与赤道之间的夹角为同一历元时刻的黄赤交角。设行星 P 在此坐标系内的坐标为 (x', y', z') , 则由坐标系旋转原理可得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_x(-\epsilon) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (16.82)$$

写成分量形式为

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \cos \epsilon - z \sin \epsilon \\ z' &= y \sin \epsilon + z \cos \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (16.83)$$

将上节所得的(16.73)式、(16.74)式和(16.75)式代入上式, 可得 (x', y', z') 与 (ζ, η) 和轨道根数之间的关系

$$\left. \begin{aligned} x' &= P_x \zeta + Q_x \eta \\ y' &= P_y \zeta + Q_y \eta \\ z' &= P_z \zeta + Q_z \eta \end{aligned} \right\} \quad (16.84)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P_x &= l_1 = \cos Q \cos \omega - \sin Q \sin \omega \cos i \\ Q_x &= l_2 = -\cos Q \sin \omega - \sin Q \cos \omega \cos i \\ P_y &= m_1 \cos \varepsilon - n_1 \sin \varepsilon \\ &= (\sin Q \cos \omega + \cos Q \sin \omega \cos i) \cos \varepsilon \\ &\quad - \sin \omega \sin i \sin \varepsilon \\ Q_y &= m_2 \cos \varepsilon - n_2 \sin \varepsilon \\ &= (\cos Q \cos \omega \cos i - \sin Q \sin \omega) \cos \varepsilon \\ &\quad - \cos \omega \sin i \sin \varepsilon \\ P_z &= m_1 \sin \varepsilon + n_1 \cos \varepsilon \\ &= (\sin Q \cos \omega + \cos Q \sin \omega \cos i) \sin \varepsilon \\ &\quad + \sin \omega \sin i \cos \varepsilon \\ Q_z &= m_2 \sin \varepsilon + n_2 \cos \varepsilon \\ &= (\cos Q \cos \omega \cos i - \sin Q \sin \omega) \sin \varepsilon \\ &\quad + \cos \omega \sin i \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (16.85)$$

显然, (P_x, P_y, P_z) 和 (Q_x, Q_y, Q_z) 是单位向量 P, Q 在日心赤道直角坐标系 $S-X'Y'Z'$ 中的方向余弦。

2. 日心赤道直角坐标系到地心赤道直角坐标系的转换 这是一个坐标系的平移过程。设行星在地心赤道坐标系 $E-X''Y''Z''$ 内的坐标为 (x'', y'', z'') 、太阳的地心赤道直角坐标为 (X', Y', Z') 、它可以在天文年历上查得, 则有

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x' + X' \\ y'' &= y' + Y' \\ z'' &= z' + Z' \end{aligned} \right\} \quad (16.86)$$

3. 地心赤道直角坐标系与地心赤道球坐标系的转换 这一过程可以用同一系统中直角坐标与球坐标之间的转换来实现。设行星 P 的地心距为 ρ , 赤经为 α , 赤纬为 δ , 则

$$\left. \begin{aligned} x'' &= \rho \cos \alpha \cos \delta, \\ y'' &= \rho \sin \alpha \cos \delta, \\ z'' &= \rho \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (16.87)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y''}{x''}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{z''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}, \\ \rho &= \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}. \end{aligned} \right\} \quad (16.88)$$

4. 行星地心位置和视位置之间的转换 由(16.88)式得到的天体地心位置 (ρ, α, δ) 还需进行一系列的系統误差改正后才能得到天体的视位置。

首先需作周日视差改正。对于太阳系中的行星或小行星等自然天体, 一般可利用球面天文中的周日视差改正公式对所得的地心位置进行修正。但对于离地面较近的人造天体等, 通常需直接将日心赤道直角坐标系平移到地面观测站直角坐标系, 而后再用(16.88)式计算出相对于观测站的球面位置 (ρ, α, δ) 。

经周日视差改正后所得的还只是天体在某一历元时刻的平位置, 对这些平位置作岁差、章动、光行差和大气折射改正后才能得到天体的视位置。这些系統误差的改正公式在球面天文书籍中都可以查到。

必须特别注意的是, 在整个星历表计算中, 所采用的春分点, 赤道、黄道, 黄赤交角 ε , 太阳的地心赤道直角坐标 (X', Y', Z') 和行星的轨道根数 Ω, i, ω 等都需对应于同一历元时刻, 如不统一, 则首先需作岁差、章动改正, 使其统一到同一起算时刻。

实际编制各种天体的星历表过程远比本节所讲的复杂,除了考虑二体引力外还必须计及各种摄动因素。所以,编制星历表工作是一项十分细致,繁复而又重要的工作。

§ 16.7 初轨计算原理和方法

前面几节已经介绍了二体问题的基本理论、积分结果以及从已知的天体轨道根数计算天体星历表的方法。本节主要讨论如何根据天体的实际观测资料计算它的轨道根数。只有这个问题解决了,二体问题才能算完全解决。

在天文学中,最原始的资料来源于观测。通常把从天体的实际观测资料求出其轨道根数的过程称为轨道计算。如果仅在二体问题的范围内进行轨道计算,则称为初轨计算,所得的轨道根数称为天体的初轨。

一、三次观测定轨原理

二体问题的轨道是圆锥曲线,椭圆轨道和双曲线轨道,有六个轨道根数: $a, e, i, \omega, \Omega, \tau$ 。抛物线轨道只有五个轨道根数: $q, i, \omega, \Omega, \tau$ 。在天文观测中最常用的是光学观测,每次光学观测可得到标志天体在天球上的方位的两个量 (α, δ) 。因此,要确定一个二体问题的轨道至少需要三次光学观测资料。如果采用其他的观测手段,如激光观测和多普勒观测等,得到的不是天体的方位而是天体的地心距或视向速度,这就需要更多次数的观测资料。这里主要介绍利用三次光学观测资料确定初轨的原理。

假设已得到三个时刻 t_1, t_2 和 t_3 时天体的三次观测值 $(\alpha_1, \delta_1), (\alpha_2, \delta_2)$ 和 (α_3, δ_3) , 则根据(16.86)和(16.87)式可得

$$\left. \begin{aligned} \rho_i \cos \alpha_i \cos \delta_i &= x_i'' = x_i' + X_i' \\ \rho_i \sin \alpha_i \cos \delta_i &= y_i'' = y_i' + Y_i' \\ \rho_i \sin \delta_i &= z_i'' = z_i' + Z_i' \end{aligned} \right\} (i=1, 2, 3) \quad (16.89)$$

在此, ρ_i 为三个观测时刻天体的地心距, (x_i', y_i', z_i') 和 (X_i', Y_i', Z_i') 分别为相应的三个时刻天体的日心赤道直角坐标和太阳地心赤道直角坐标。

(16.89) 式共有 9 个方程, 但包含有 ρ_i, x_i', y_i', z_i' 等十二个未知量。根据 (16.84) 式和 (16.85) 式可知, x_i', y_i', z_i' 可以用行星的六个轨道根数 $a, e, i, \omega, \Omega, \tau$ 表示, 这样 (16.89) 式实质上只包含 9 个未知量, 再用消去法从 9 个方程中消去三个地心距 ρ_i , 就得到仅包含 6 个轨道根数作为未知量的 6 个方程, 最后就可唯一解出 6 个轨道根数。同时, 从常微分方程学的知识也可说明三次观测定初轨的原理。二体问题的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu}{r^2} x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{\mu}{r^2} y &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{\mu}{r^2} z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

此为三个二阶常微分方程, 它们的通解形式已在前面几节给出, 包含有六个相互独立的积分常数, 即轨道根数, 只有给定初始条件才能完全确定这些常数。对于天体的轨道运动, 给定的初始条件一般有两种形式, 一种是给出某一初始时刻天体的日心黄道直角坐标 (x_0, y_0, z_0) 和速度 $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$; 另一种是给出两个不同时刻 t_1, t_2 时天体的日心黄道直角坐标 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 。无论给出何种形式的初始条件, 初值共有 6 个, 因此必须至少要有三次观测值才能定出这些初值, 进而代入二体问题的通积分, 最终解出所需要的 6 个轨道根数。

轨道计算的基本思想,就是采用适当的方法从已知某天体的三次观测值(t_i, α_i, δ_i)($i=1, 2, 3$)求出该天体在某一时刻的坐标和速度,或者求出该天体在某两个时刻的坐标,而后求出该天体的轨道根数。从理论上说,这一问题是完全可解的。但事实上,由于各种函数关系都比较复杂,要得出严格解是十分困难的,往往只能采用近似求解的方法来定轨。

二、几种常用的初轨计算方法

轨道计算是天体力学中发展得较早的基本问题之一,在长期的观测和实践中,前人已建立起多种轨道计算方法,归纳起来,常用的有以下几种:

1. 高斯方法 在十九世纪初,小行星发现以后,要求很快算出它们的轨道根数,以便于编制星历表指导观测。在1801年,当皮亚齐发现第一颗小行星后,德国数学家高斯(C. F. Gauss)很快就算出了它的椭圆轨道,并预报了这颗小行星的位置,使人们再次找到了它。此后,高斯对自己的计算方法进行了改进,使它不仅从理论上能阐明轨道计算的原理,在实际上也成为轨道计算的有效工具。后来,随着数学和其他学科的发展,高斯方法几经修改和补充,特别是经吉布斯(Gibbs),奥波耳彻尔(T. Oppolzer)和梅尔顿(G. A. Merton)等人的改进使高斯方法日趋完善,但方法的基本原理和思想仍是高斯所提出的,并没有根本改变。

高斯方法的基本思想是根据行星的三次观测计算出两个不同时刻天体的位置(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2),而后确定出椭圆轨道的根数。由于三次光学观测只能给出行星在空间的三个方位,如果能首先确定天体轨道面在空间的位置,然后得到三个观测方位在轨道面上的投影,这样就可以唯一确定行星椭圆轨道在轨道面上的位置,从而确定行星的轨道。

因此, 高斯首先采用近似的方法得出两个不同时刻 t_1, t_2 时天体的向径 r_1 和 r_2 在轨道面上所组成的扇形面积与以 r_1, r_2 和它们之间的弦所组成的三角形面积之比。而后根据开普勒第三定律, 确定三个观测时刻天体的向径 r_1, r_2 和 r_3 之间所组成的三个扇形面积, 这样就确定了行星轨道面在空间的位置。已知了三个观测时刻天体的方位和轨道面的空间位置, 就可以求出三个观测时刻天体的地心距, 这是整个高斯方法的关键步骤。一旦地心距 ρ_1, ρ_2, ρ_3 求出, 则代入(16.89)式就可以得出行星在三个不同时刻相应的日心赤道直角坐标, 再利用坐标系旋转和二体问题的已知积分不难求出行星的轨道根数。

采用高斯方法进行轨道计算, 精度高且对太阳系内不同轨道偏心率的天体都适用, 但是整个计算过程比较繁复, 工作量较大。

2. 改进的拉普拉斯方法 这是目前最常用的计算椭圆轨道的方法。它的基本原理是采用三个观测方位的方向余弦之比作为辅助量, 得出以中间观测时刻行星的坐标 (x_2, y_2, z_2) 和速度 $(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$ 为变量的基本方程, 利用时间间隔的幂级数展开的近似方法求解基本方程得出 (x_2, y_2, z_2) 和 $(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$, 再由它们计算轨道根数。这种方法原理清楚、运算简便, 虽然计算精度稍低于高斯方法, 仍得到广泛的应用。

3. 已知 a 值的巴日诺夫方法 对于太阳系的某些卫星、小行星和人造天体而言, 它们的运动速度较快, 周期较短, 轨道偏心率也比较小, 往往可以通过多次观测定出它们的运动周期, 再近似地定出它们的轨道半长径 a 。巴日诺夫方法利用已知的 a 值和三次观测资料确定轨道平面和三次观测的地心距, 由此定出三个时刻的日心黄道直角坐标和天体的轨道根数。

4. 奥耳白尔方法 为了计算某些脱离太阳系一去不复返的

彗星的轨道,许多天文学家提出了不同的计算抛物线轨道的方法。其中最常用的是1797年由奥耳白尔提出的计算方法,这种方法后来虽经很多人进行了修改,但基本原理并没有多大的变化。

与高斯方法相似,奥耳白尔(H. W. M. Olbers)方法也是采用近似的方法求出两个不同时刻天体的日心赤道直角坐标而后再求出该天体的轨道根数。不同的是,抛物线轨道只有五个轨道根数。因而在计算过程中可以充分利用抛物线轨道的一些几何性质来进行简化和验证。

综上所述,利用三次光学观测资料计算初轨的问题已全部解决。但是,在实际计算中,由于各种系统误差和偶然因素的影响,所得的观测资料不够精确以致影响轨道计算的精度。为此,必须采用大量的观测资料,首先消除其系统误差,进行数据处理,在筛选后的资料中选择多组三次观测资料计算出多组轨道根数,再利用最小二乘法进行轨道改进以求得最精确的一组轨道根数。同时,初轨计算后还需将所得的根数进行星历表计算,以检验计算方法和过程的准确性与有效性。如果星历表计算所得的三次观测时刻的方位 $(\alpha_i)_c$, $(\delta_i)_c$ 与所给出的相应时刻的观测值 $(\alpha_i)_o$, $(\delta_i)_o$ 之差在精度范围之内,则认为此初轨计算有效,否则还需重行检查整个计算的方法和步骤。

§ 16.8 引力作用范围, 宇宙速度

二体问题虽然是天体力学中最简化的模型,但它是天体力学的基础。由于二体问题已彻底解出,因而它的结果在很多方面都获得实际应用,如前面所讲述的星历表计算,初轨计算等等。在本节和下节中主要介绍二体问题在宇宙航行中的应用。

一、引力作用范围

根据引力作用定律, 质量为 m 的任意物体都对周围物体产生吸引, 并在其周围形成一个受 m 引力作用的区域。如果以 m 为中心, 以引力作用有实际影响的最大距离 ρ 为半径作一球面, 则称此球面为作用球或引力作用范围, ρ 称为引力作用范围半径。

利用引力作用范围的概念, 可将多体问题简化成多个二体问题。例如, 有质量较大的天体 M 和质量较小的天体 m , 它们之间的距离为 A 。另有一质量可忽略的运动质点 P , 它们构成三体问题。在近似讨论的情况下, 当 P 在 m 的作用范围内时, 可主要考虑 m 对 P 的吸引, 而忽略 M 对 P 吸引产生的摄动力。当 P 在 m 的作用范围以外运动时, 主要考虑 M 对它的吸引, 而将 m 对 P 的吸引力视为摄动力而加以忽略。这样就将 P 在 M, m 吸引下的三体问题化作两个二体问题来考虑, 而得出近似解。

在天文学中, 根据不同的问题提出了三种引力作用范围的定义, 因此引力作用范围半径有三种不同的取法:

(1) 以 M, m 对 P 点的直接引力作为标准, m 的引力作用范围半径取为

$$\rho = \rho_1 = A \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16.90)$$

这种作用范围常称为引力范围。

(2) 假设 P 位在距天体 m 距离为 ρ_2 处, P 受 m 的引力恰好等于 M 的起潮力, 即取

$$\rho = \rho_2 = A \left(\frac{m}{2M} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (16.91)$$

为第二种引力作用范围半径。

在动力学问题的定性讨论中, 经常以平面圆型限制性三体问

题的内拉格朗日点 L_1 (见 §17.9) 到 m 的距离为作用范围半径, 近似地取为

$$\rho = \rho_2 = A \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (16.92)$$

这种作用范围称为希尔范围。

(3) 在讨论宇宙航行动力学问题时, 常以 m 和 M 对质点 P 的吸引力和摄动力大小之比作为标准来定义引力作用范围, 此时 m 的作用范围半径取为

$$\rho = \rho_3 = A \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (16.93)$$

在下面的讨论中, 就是采用这种引力作用范围半径。

地球在日、地系统以及月球在地、月系统中的三种作用范围半径见下表:

天体 \ 作用范围半径	ρ_1 (米)	ρ_2 (米)	ρ_3 (米)
地球	0.27×10^9	2.27×10^9	0.93×10^9
月球	4.3×10^7	8.9×10^7	6.6×10^7

从表中可看出, ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 三个数值相差较大, 因此作用范围仅是在近似讨论中所采用的一种粗略概念。

二、宇宙速度

二体问题的活力公式体现了天体轨道运动速度和轨道之间的关系。它也可用于讨论从地面发射人造天体使其成为各种类型的宇宙飞行器的问题, 其中一个重要课题是给出发射速度的最小值, 这就是所谓宇宙速度。通常宇宙速度分为三种:

1. 第一宇宙速度 根据活力公式

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad \mu = G(M + m).$$

对于发射一个作椭圆运动的天体而言，当发射地点给定，则轨道半长径 a 越小，轨道速度也越小。如果要从地面上发射一颗人造卫星，则 a 的最小值应为地球赤道半径 R 。若 $a < R$ ，卫星轨道要碰到地面，不可能绕地球旋转。故在地面上发射人造地球卫星使其能绕地球旋转的最小速度为

$$v_1^2 = GE \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R} \right) = \frac{GE}{R},$$

或

$$v_1 = \sqrt{\frac{GE}{R}} \quad (16.94)$$

在此， E ， R 分别为地球质量和地球赤道半径， G 为万有引力常数，忽略卫星质量，则 $\mu \simeq GE$ 。将地球质量 $E = 5.9742 \times 10^{24}$ 千克，地球赤道半径 $R = 6,378,140$ 米代入计算得 $v_1 = 7.9 \times 10^3$ 米/秒。

v_1 称为第一宇宙速度，又称为环绕速度。

2. 第二宇宙速度 若从地面上发射人造天体，使其沿抛物线轨道运动，则此人造天体将脱离地球引力场运动到无穷远处而一去不复返。此时，活力公式为

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GE}{R}} = \sqrt{2} v_1 \quad (16.95)$$

v_2 为从地面发射人造天体使其脱离地球引力场的最小速度，称为第二宇宙速度，又称为逃逸速度或脱离速度。将地球质量和赤道半径的数值代入上式，可得 $v_2 = 11.2 \times 10^3$ 米/秒。

对于太阳系的主要天体，根据它们的质量和平均半径可计算出相应的环绕速度和逃逸速度，它们的值见下表（速度单位： 10^3 米/秒）：

天体 v_1, v_2	太阳	水星	金星	地球	火星	木星	土星	天王星	海王星	冥王星	月球
v_1	436.8	3.0	7.3	7.9	3.5	42.1	25.2	15.1	16.7	0.85	1.7
v_2	617.7	4.3	10.3	11.2	5.0	59.5	35.6	21.4	23.6	1.2	2.4

此外, 当 $v > v_2$ 时, 天体将沿着双曲线轨道飞向无穷远处。对于抛物线轨道, 在无穷远处天体的速度为零, 但对于双曲线轨道 $a < 0$, 在无穷远处 $r = \infty$, 则由活力公式得

$$v_{\infty} = \sqrt{-\frac{GE}{a}} > 0.$$

v_{∞} 称为双曲线轨道的剩余速度, 显然

$$v_{\infty}^2 = v^2 - \frac{2GE}{r} = v^2 - v_2^2. \quad (16.96)$$

3. 第三宇宙速度 从地面发射火箭, 使其能脱离太阳引力场而飞出太阳系所需要的最小速度称为第三宇宙速度。

为了求得第三宇宙速度, 必须同时考虑地球和太阳两个引力场。要火箭脱离太阳引力场, 在地球轨道处必须具有相对于太阳的逃逸速度 V_2 , 其大小为

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM}{A}} = 42.4 \times 10^3 \text{ 米/秒}. \quad (16.97)$$

其中, M 为太阳质量, A 为日地距离(天文单位)。

通常使火箭的运动方向与地球公转方向一致, 这样可以充分利用地球公转速度 V_0 , 使火箭相对于地球的最小速度为

$$V' = V_2 - V_0 = (42.4 - 30) \times 10^3 = 12.4 \times 10^3 \text{ (米/秒)}.$$

为要求得地面发射所需要的速度, 采用 (16.92) 式所定义的引力作用范围, 对于地球而言, $\rho_3 = 0.93 \times 10^9$ 米。在以地心为中心, ρ_3 为半径的引力作用球内, 火箭与地球组成一个二体问题, 一旦飞出这个作用范围, 则火箭与太阳组成另一个二体问题。如果火箭在地球引力作用范围边界上具有速度 V' , 则它就可以脱离

太阳引力场而飞出太阳系。此时，活力公式可写为

$$V^2 = GE \left(\frac{2}{\rho_3} - \frac{1}{a} \right). \quad (16.98)$$

设地面发射使火箭脱离太阳系的速度为 v_3 ，则有

$$v_3^2 = GE \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right). \quad (16.99)$$

用(16.99)式减(16.98)式得

$$v_3^2 - V^2 = GE \left(\frac{2}{R} - \frac{2}{\rho_3} \right) = \frac{2GE}{R} \left(1 - \frac{R}{\rho_3} \right).$$

由于地球半径 R 远小于引力作用范围半径 ρ_3 ，故在近似的情况下可忽略上式中的 $\frac{R}{\rho_3}$ 项，使得

$$v_3^2 = V^2 + \frac{GE}{R} = V^2 + v_2^2.$$

以 V 和 v_2 的值代入上式可得

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + V^2} = 16.9 \times 10^3 \text{ 米/秒}. \quad (16.100)$$

v_3 为第三宇宙速度。

上述三种宇宙速度是在二体问题基础上得出的近似结果，一般用于定性讨论。在实际应用中，必须针对具体问题作适当的修正。

§ 16.9 二体问题在宇宙航行动力学中的应用

一、初始发射速度与人造地球卫星轨道大小的关系

假设在地面上发射一颗人造地球卫星所需的速度是 v_0 ，卫星在到达离地面高度 H 后成水平飞行而进入圆轨道，由活力公式可得

$$v_0^2 = GE \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R+H} \right)$$

$$= \frac{2GE}{R} \left[1 - \frac{R}{2(R+H)} \right] = v_2^2 \left[1 - \frac{R}{2(R+H)} \right]$$

其中 R 为地球平均半径, v_2 为第二宇宙速度, 上式可改写为

$$v_0 = v_2 \sqrt{1 - \frac{R}{2(R+H)}} \quad (16.101)$$

上式表明, H 越大, v_0 也越大, 当 $H \rightarrow \infty$ 时, $v_0 \rightarrow v_2$ 。这就是说, 发射卫星时的初始速度越大, 它上升的高度就越高, 卫星的轨道也就越大。

二、卫星进入轨道时, 向径, 速度与轨道根数之间的关系

如图 16.10 所示, 若卫星在 t 时刻进入轨道, 此时, 它的向径和速度分别为 r , v , 向径与速度正方向之间的夹角为 α 。由此可利用二体问题的关系式求出此卫星的轨道根数。

利用活力公式

$$v^2 = GE \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

已知 r , v , 就可求出卫星的轨道半长径 a 。

又由动量矩积分公式知

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{v} &= r v \sin \alpha = h \\ &= \sqrt{\mu a (1 - e^2)}. \end{aligned} \quad (16.102)$$

已知 r , v , α , a , $\mu = GE$, 由此可解出偏心率 e 和半通径 $p = a(1 - e^2)$ 。将 r , p , e 代入轨道方程

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}$$

即可求出 $\cos f$ 。从图 16.10 可看出, 当向径与速度正方向之间的夹角 $\alpha < 90^\circ$ 时, $0^\circ < f < 180^\circ$, 而当 $\alpha > 90^\circ$ 时, $180^\circ < f < 360^\circ$ 。

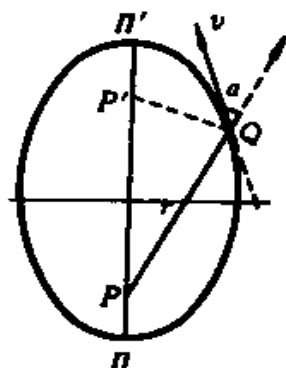


图 16.10 卫星进入轨道时的初值与轨道根数的关系

故按照给定的 a 的大小和象限以及 $\cos f$ 的值就可定出真近点角 f 的大小和象限。利用公式

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{f}{2}$$

又可以完全确定偏近点角 E 的大小和象限。

将 E, e 代入开普勒方程

$$E - e \sin E = M$$

可求得平近点角 M , 而

$$n = \sqrt{\mu} a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{GE} a^{-\frac{3}{2}} \quad (16.103)$$

因此由 $M = n(t - \tau)$ 可求出过近日点的时刻 τ 或 $M_0 = -n\tau$ 。

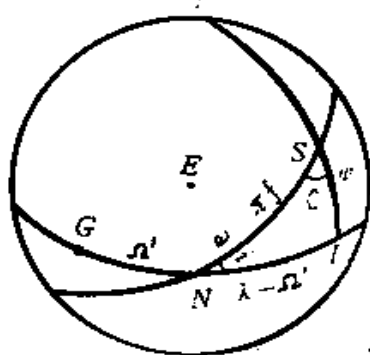


图 16.11 地心天球

为了求出另外三个轨道根数, 可作地心天球(见图 16.11), 大圆 GND 为地球赤道面在天球上的投影, NIS 为卫星轨道在天球上的投影, G 为格林尼治子午圈与赤道面的交点, N 为卫星轨道穿过赤道的升交点, P 为北极, D 为卫星进入轨道处的子午圈 PSD 与赤道的交点。在人造卫星运动

理论中把卫星在某时刻的地心向径与地面的交点称为此时刻卫星的星下点。图 16.11 中的 S 点即代表卫星在进入轨道时刻的星下点在天球上的投影, 它也是此时刻的子午圈与卫星轨道的交点。由于人造卫星的运动速度比较快, 可以通过连续几次的观测定出星下点的地理位置 (λ, φ) 和进入轨道时的子午圈与卫星轨道之间的夹角 θ 。具体测定方法, 可参阅有关的专门书籍①。

从图 16.11 可知, $\widehat{NI} = \omega$, $\widehat{IS} = f$, $\widehat{GN} = \Omega'$ (Ω' 为从格林尼治子午圈算起的升交点地理经度), $\widehat{ND} = \lambda - \Omega'$, $\widehat{SD} = \varphi$,

① 可参阅刘林等编著《人造地球卫星运动理论》, 科学出版社, 1974 年。

$\angle SND = i$ 。于是, 利用球面直角三角形 SND 可得下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \cos i &= \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \omega &= \frac{\sin \varphi}{\sin i} \\ \cos(\omega + f) &= \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} i \\ \sin(\lambda - Q') &= \sin(\omega + f) \sin \theta \\ \cos(\lambda - Q') &= \frac{\cos(\omega + f)}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (16.104)$$

由(16.104)式可解出 $i, \omega + f, \lambda - Q'$, 从而得出另外两个轨道根数 i, ω , 和 Q' 。从天文年历上可查出卫星进入轨道时刻的格林尼治恒星时 S_0 , 这样就可得到从春分点起算的轨道升交点经度 $Q = Q' + S_0$ 。

如果给出的已知量是卫星进入轨道时刻的地心赤道直角坐标 $r(x, y, z)$ 和速度 $\dot{r}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, 则也可以从二体问题的关系式推出所有的轨道根数, 读者不难自行推导求解。

三、向大行星发射火箭的轨道设计

无论是发射人造卫星、行星际火箭或宇宙探测器等等都必须考虑节省燃料、节省时间以及克服各种偶然摄动因素等问题。因此, 人造天体的轨道设计和飞行姿态等等都是宇宙航行动力学中极其重要的课题。在此, 仅以二体问题为基础介绍一种发射行星际火箭的近似轨道设计方案——双切轨道。

以火星为例, 来讨论向外行星发射火箭的轨道设计。假设从地面发射一枚火箭, 使其运行轨道既与地球公转轨道相切又与火星公转轨道相切, 亦即使火箭轨道在近日点处与地球轨道相切, 在远日点处与火星轨道相切(见图 16.12)。

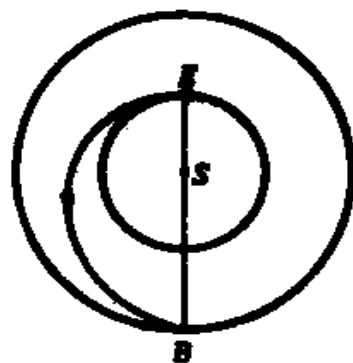


图 16.12 行星际火箭的双切轨道

这样的运行轨道可以使火箭在飞行过程中充分利用地球和火星的公转速度，以达到节省能源的目的。

在近似的情况下，可以认为地球和火星的轨道都是圆形，且都在黄道面上。以地球公转轨道半径为长度单位，火星公转轨道半径记为 r_k ，则由图 16.12 可看出，火箭的轨道半长径为

$$a = \frac{1}{2}(1 + r_k) \quad (16.105)$$

火箭在近日点 E 处的速度为

$$v^2 = GM \left(2 - \frac{1}{a} \right) \quad (16.106)$$

其中 M 为太阳质量。

地球的公转速度即为圆周运动速度 V_0 ，且有

$$V_0^2 = GM \quad (16.107)$$

由于火箭轨道在 E 处与地球轨道相切，火箭运动方向与地球公转方向一致，且 $a > 1$ ， $v > V_0$ ，则有

$$v' = v - V_0$$

v' 为火箭在 E 点处相对于地球的运动速度，此也可以近似视为火箭脱离地球引力作用范围时所需要的速度。

与第三宇宙速度的推导相类似，同样可得在地面上发射行星际火箭使其进入双切轨道而飞向火星所需要的速度为

$$v_4^2 = v'^2 + v_2^2$$

即

$$v_4 = \sqrt{v'^2 + v_2^2} \quad (16.108)$$

其中 v_2 为第二宇宙速度。

向其他外行星发射具有双切轨道的火箭所需的地面发射速度，也完全可仿照上述的讨论求出，仅需将 (16.105) 式中的 r_k 换成相应其他外行星的轨道半径即可。

如果向内行星发射具有双切轨道的行星际火箭，则由于

$r_p < 1$, 火箭的轨道半长径 $a = \frac{1}{2}(1 + r_p) < 1$, 因此由(16.106)式和(16.107)式可知 $v < V_0$, 必须取

$$v'' = V_0 - v$$

而所需的相应地面发射速度仍为

$$v_p = \sqrt{v''^2 + v_2^2}. \quad (16.109)$$

将各大行星的轨道半长径值依次代入(16.109)式或(16.108)式就可逐一计算出具有双切轨道的行星际火箭到达各大行星所需要的地面发射速度。

第十七章 N 体问题

N 个 ($N \geq 2$) 质点在相互之间万有引力作用下的动力学问题称为 N 体问题。在天体力学中, N 体问题有着很重要的实际意义, 因为太阳系、星团、星系乃至总星系都可以看作各种大小不等的 N 体系统, 如果将行星、恒星都视为质点, 且仅考虑它们之间的引力作用, 则太阳系动力学, 星团动力学, 星系动力学等等的主要内容也就是讨论引力 N 体问题。因此, 深入研究和解决 N 体问题是天体力学中的一个极为重要的任务。

迄今为止, 只有二体问题已被彻底解决和广泛应用, 三体以上的 N 体问题还远远没有解决, 只能通过一些近似的方法来求解以及对一些特殊问题作定性的研究。本章主要介绍 N 体问题的基本方程和限制性三体问题的特解和定性结果。

§ 17.1 N 体系统的力函数

一、力函数和势函数

设有 N 个可视为质点的天体 $P_1, P_2, \dots, P_n$, 它们的质量分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n$, 它们在空间惯性坐标系, $O-\xi\eta\zeta$ 中的坐标分别记为 $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$ (见图 17.1)。任意两天体 P_i 和 P_j 之间的距离 Δ_{ij} 可表为

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2} \quad (17.1)$$

P_j 对 P_i 的吸引力为

$$F_{ij} = G \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^2} \cdot \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{ij}} \quad (17.2)$$

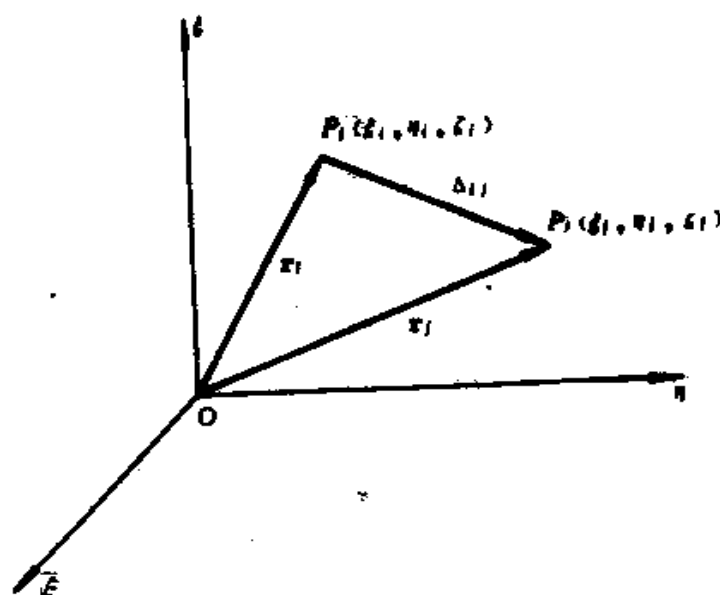


图 17.1 N 体问题的力函数

Δ_{ij} 的方向定义为从 P_i 到 P_j , 它在 $O-\xi\eta\zeta$ 系的三个坐标轴上的分量分别为

$$-\frac{\xi_i - \xi_j}{\Delta_{ij}}, \quad -\frac{\eta_i - \eta_j}{\Delta_{ij}}, \quad -\frac{\zeta_i - \zeta_j}{\Delta_{ij}}.$$

或记为

$$-\frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial \xi_i}, \quad -\frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial \eta_i}, \quad -\frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial \zeta_i}.$$

因此, (17.2) 式可写成分量的形式

$$\left. \begin{aligned} (F_{ij})_x &= -Gm_i m_j \frac{\xi_i - \xi_j}{\Delta_{ij}^3} = Gm_i m_j \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} \right), \\ (F_{ij})_y &= -Gm_i m_j \frac{\eta_i - \eta_j}{\Delta_{ij}^3} = Gm_i m_j \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} \right), \\ (F_{ij})_z &= -Gm_i m_j \frac{\zeta_i - \zeta_j}{\Delta_{ij}^3} = Gm_i m_j \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} \right). \end{aligned} \right\} (i \neq j) \quad (17.3)$$

由此可得天体 P_i 受其他 $N-1$ 个天体的吸引力为

$$\left. \begin{aligned} (F_i)_x &= G m_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \right), \\ (F_i)_y &= G m_i \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \right), \\ (F_i)_z &= G m_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \right). \end{aligned} \right\} (i \neq j)$$

根据牛顿第二运动定律, 第 i 个天体 P_i 的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= G m_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \right), \\ m_i \ddot{\eta}_i &= G m_i \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \right), \\ m_i \ddot{\zeta}_i &= G m_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \right). \end{aligned} \right\} (i \neq j) \quad (17.4)$$

对于 N 体系统中的其他任意天体也可给出类似于(17.4)的方程组形式, 只是方程右端的内容不同。为了使 N 体系统中任一天体的运动方程都可用统一形式表示, 引入函数

$$\begin{aligned} U &= G \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n \frac{1}{2} \left(\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \right) = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \right) \\ &= G \left\{ \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_1 m_3}{\Delta_{13}} + \dots + \frac{m_1 m_n}{\Delta_{1n}} \right. \\ &\quad + \frac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} + \frac{m_2 m_4}{\Delta_{24}} + \dots + \frac{m_2 m_n}{\Delta_{2n}} \\ &\quad \left. + \dots + \frac{m_{n-1} m_n}{\Delta_{n-1n}} \right\} \end{aligned} \quad (17.5)$$

函数 U 仅为坐标 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的函数, 它对第 i 个天体的坐标 (ξ_i, η_i, ζ_i) 求偏导数后仅出现包含 m_i 的项, 由此运动方程(17.5)式可改写为

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= -\frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \\ m_i \ddot{\eta}_i &= -\frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ m_i \ddot{\zeta}_i &= -\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (17.6)$$

显然, 由于函数 U 的引入, 使任一天体的运动方程都可列为统一的形式。函数 U 称为 N 体系统的力函数, 它表征了整个 N 体引力系统的力学性质且具有以下特点:

(1) 力函数是标量, 它仅是质点间距离的函数, 与运动坐标系的选择无关;

(2) 力函数对一质点的某一坐标分量的偏导数是该质点所受引力在此坐标轴上的分量;

(3) 力函数是整个 N 体系统势能的反号。

(4) 力函数的引入简化了 N 体问题的数学处理。对于任一 N 体系统, 只要找出其力函数就可得出作用于此系统各质点的引力在各坐标轴上的分量, 从而很容易地列出系统的运动方程。

如果在第 i 个天体 P_i 的位置处放置一个单位质量的质点 P , 则 P 受其他 $n-1$ 个天体引力所产生的力函数为

$$V = G \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \quad (i \neq j) \quad (17.7)$$

V 称为势函数(或位函数), 它表征了引力场在该点的性质, 在 N 体系统产生的引力场中, 任何一个位置都有势存在。势函数与力函数相似也是标量, 仅与距离有关而与坐标系的选择无关; 势函数对坐标的偏导数为引力加速度在该坐标轴上的分量; 势函数是单位质量的质点所具有的势能的反号。在许多实际问题中, 只要是守恒力系就可以通过寻找系统的力函数或势函数, 进而得出系统的运动方程。这就使矢量运算变成标量运算。大大地简化了所

讨论的问题。

二、球对称天体对外面一质点的吸引

如果 N 个天体都可视为质点，它们之间的相互作用可以直接应用牛顿万有引力定律来描述。但是，所有的实际天体都不是质点，它们具有一定的大小和形状，在这样的情况下，是否可以用万有引力定律来讨论天体间的相互吸引呢？下面就来讨论这个问题。

假设天体为一个密度球对称分布的球体，它对外面一质点的吸引所产生的势函数如何表示呢？为此将此球形天体分成无限多个同心球壳，这些球壳的中心为天体的质量中心。由于密度呈球对称分布，因此每一层球壳的质量都可认为是均匀分布的。先讨论每一球壳对外面的吸引，而整个天体对外面一质点的吸引可看成为各个球壳对该点吸引的总和。

1. 均匀球壳对外面一质点的吸引

如图 17.2 所示， O 为均匀球壳的中心， P 为球壳外的任意

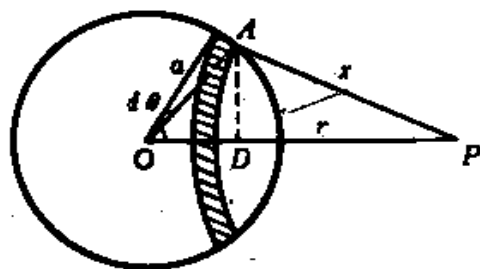


图 17.2 均匀球壳对外面一质点的吸引

质点。设球壳的半径为 a ，密度为 σ 。为讨论方便起见，把整个球壳分割为无数个宽度为无限小的圆环。其环面垂直于 OP ， D 为环的中心，环上任一点 A 与 OP 之间的夹角为 θ ，圆环宽度对应的球心角为 $d\theta$ 。

令 $OP=r$ ， $PA=x$ ，则在 $\triangle OAP$ 中应用余弦公式可得

$$x^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta. \quad (17.8)$$

整个圆环的质量为 $2\pi a^2 \sigma \sin \theta d\theta$ ，根据势函数的定义，圆环对 P 点吸引产生的势函数可表为

$$dV = \frac{G \cdot 2\pi a^2 \sigma \sin \theta d\theta}{x} \quad (17.9)$$

将(17.8)式两边求微分可得

$$x dx = a r \sin \theta d\theta$$

以此代入(17.9)式即得

$$dV = G \cdot \frac{2\pi a \sigma x dx}{r x} = G \cdot \frac{2\pi a \sigma dx}{r} \quad (17.10)$$

由图 17.2 知, x 值的变化范围为 $r-a \leq x \leq r+a$, 将(17.10)式两边积分即可得整个球壳对 P 点吸引产生的势函数为

$$V = G \cdot \frac{4\pi a^2 \sigma}{r}$$

一个密度均匀分布的球壳总质量 $M = 4\pi a^2 \sigma$ 。故上式可改为

$$V = \frac{GM}{r} \quad (17.11)$$

这就证明: 均匀球壳对外面一质点吸引产生的势函数等于整个球壳质量集中于球心时对该点吸引产生的势函数。因此一个均匀球壳可以视为放于球壳中心, 质量等于球壳质量的一个质点。

2. 具有球对称密度分布的天体对外面一质点的吸引

设天体可视为由无数个各层密度均匀分布的同心球壳组成。由上面的讨论可知, 在距球心 x 处的均匀球壳层对球外距球心 r 处的一质点 P 的吸引所产生的势函数可记为

$$dV = \frac{G 4\pi x^2 \sigma(x) dx}{r}$$

其中 $\sigma(x)$ 为球体密度, 它是球心距离的函数, 对每一同心球壳而言它为常数。故整个天体对 P 点吸引的势函数为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \frac{G \cdot 4\pi x^2 \sigma(x)}{r} dx \\ &= \frac{G}{r} \int_0^a 4\pi x^2 \sigma(x) dx \end{aligned} \quad (17.12)$$

事实上, 整个球体的总质量 $M = \int_0^a 4\pi x^2 \sigma(x) dx$, 一旦 $\sigma(x)$ 的函数形式给出就可以积分积出, 以 M 代入上式得

$$V = -\frac{GM}{r}.$$

此又证明: 一个具有球对称密度分布的天体对外面一质点的吸引也可看成一个位于球体中心, 质量等于球体质量的质点对该点的吸引。也就是说, 具有球对称密度分布的天体可视为质点。

在太阳系中, 很多天体都可以近似看作具有球对称密度分布。上述结论使得在很多情况下可以用质点间的牛顿万有引力定律直接讨论太阳系天体之间的相互吸引作用。当然, 天体视为球体只是一种最粗略的近似, 在讨论许多天体的运动, 特别是讨论人造天体的运动时, 往往取旋转椭球体或三轴椭球体作为行星或地球形状的近似形式, 这样, 情况就要复杂得多。

§ 17.2 地球对外面一质点的吸引

在近似讨论中, 可以把地球当作球形刚体而视为质点来处理。但实际上地球的形状很接近于旋转椭球体, 它的质量分布对称于三个相互垂直的平面, 其中之一很接近于地球赤道面。因此, 在严格的讨论中, 特别是在讨论地球对较近的天体, 如月球, 人造地球卫星等的吸引问题以及地球自转运动等问题时, 不能把地球当作质点看待, 而必须考虑它的形状, 大小和密度分布。本节主要讨论将地球视为旋转椭球体时, 它对外面一质点的吸引。

为简化起见, 取地球质量中心 O 为原点, 以三个对称面的交线即地球中心惯性主轴为 X, Y, Z 轴, XY 平面接近于地球赤道面, Z 轴接近于北极方向, X, Y, Z 轴成右手正交系, 这样的坐标系

是固定在地球上的。设 A, B, C 为相对于三个坐标轴的转动惯量:

$$\left. \begin{aligned} A &= \iiint (y^2 + z^2) dm, \\ B &= \iiint (z^2 + x^2) dm, \\ C &= \iiint (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \right\} \quad (17.13)$$

其中 $dm = \sigma dx dy dz$, σ 为密度函数。故惯量椭球面方程为

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

由于设地球为旋转椭球体, 因此 $A = B$, 上式简化为

$$A(x^2 + y^2) + Cz^2 = 1.$$

又由于对称性, 应有

$$\iiint x^l y^g z^h dm = 0, \quad (l, g, h \text{ 中有一个是奇数}) \quad (17.14)$$

设 l 为奇数, 由于是对整个体积积分, 当 x 换为 $-x$ 时, 积分值正好反号, 上式的值为零。因此, 被积函数只要有 x, y, z 的任一奇次幂, 体积积分都为零, 且下列关系式成立:

$$\iiint x dm = \iiint y dm = \iiint z dm = 0; \quad (17.15)$$

$$\iiint yz dm = \iiint zx dm = \iiint xy dm = 0; \quad (17.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \iiint x^3 dm &= \iiint x^2 y dm = \iiint x^2 z dm = 0, \\ \iiint y^3 dm &= \iiint y^2 x dm = \iiint y^2 z dm = 0, \\ \iiint z^3 dm &= \iiint z^2 x dm = \iiint z^2 y dm = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.17)$$

设 Q 为另一可视为质点的天体(见图 17.3)。 P 为地球内部任一点元, 其质量为 dm , 并令

$$OQ = \rho, \quad OP = r, \quad PQ = \Delta.$$

P 点在中心惯性主轴坐标系 $O-XYZ$ 系中的坐标为 (x, y, z) , OQ

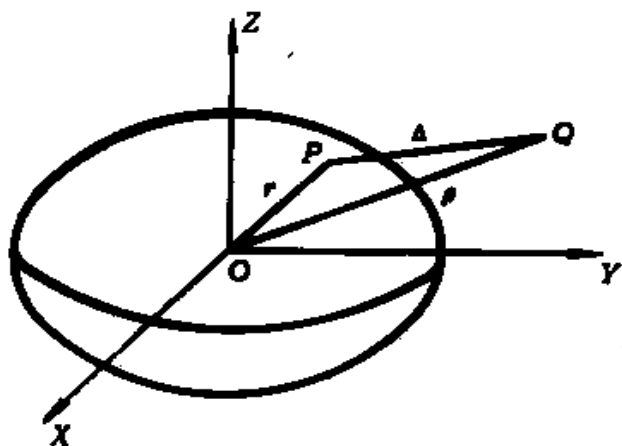


图 17.3 旋转椭球形的地球
对外面一天体的吸引

在此坐标系中的方向余弦为 (l, m, n) 。再取另一坐标系, 以 O 为原点, OQ 为 ξ 轴, η, ζ 轴在垂直于 ξ 轴的平面上并与其成右手正交系。若 P 点在 $O-\xi\eta\zeta$ 系中的坐标为 (ξ, η, ζ) , 则在 $\triangle OPQ$ 内按余弦公式和 ξ 轴的定义得

$$\Delta^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \theta = \rho^2 + r^2 - 2\rho\xi \quad (17.18)$$

根据力函数的定义, 地球对天体 Q 吸引所产生的力函数为

$$U = GM \iiint \frac{dm}{\Delta}. \quad (17.19)$$

其中 M 为天体 Q 的质量。

在一般情况下, 主要考虑地球与日、月之间的吸引, 而日地距离和日月距离都远远大于地球半径, 因此,

$$\Delta^2 = \rho^2 \left(1 - \frac{2\xi\rho - r^2}{\rho^2} \right),$$

$$\text{或} \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{2\xi\rho - r^2}{\rho^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

其中 $\frac{r}{\rho}$, $\frac{\xi}{\rho}$ 都是小量, 故上式可按二项式定理展开得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} & \left[1 + \frac{\xi}{\rho} + \frac{3\xi^2 - r^2}{2\rho^2} + \frac{5\xi^3 - 3\xi r^2}{2\rho^3} \right. \\ & \left. + \frac{35\xi^4 - 30\xi^2 r^2 + 3r^4}{8\rho^4} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (17.20)$$

以此代入(17.19)式。因为 ρ 与体积分无关，故力函数 U 的表达式可整理为

$$U = GM \left[I_0 + \frac{I_1}{\rho} + \frac{I_2}{2\rho^2} + \frac{I_3}{2\rho^3} + \frac{I_4}{8\rho^4} + \cdots \right]. \quad (17.21)$$

上式中

$$I_0 = \iiint dm = E \text{ (地球质量)}. \quad (17.22)$$

$$I_1 = \iiint \xi dm.$$

OQ 在 $O-XYZ$ 系内的方向余弦为 (l, m, n) ，按 ξ 轴的定义知 $\xi = lx + my + nz$ 代入上式，利用(17.15)式且 l, m, n 与积分无关，因此

$$I_1 = \iiint (lx + my + nz) dm = 0. \quad (17.23)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint (3\xi^2 - r^2) dm \\ &= \iiint [3(r^2 - \eta^2 - \zeta^2) - r^2] dm \\ &= \iiint [2r^2 - 3(\eta^2 + \zeta^2)] dm \\ &= \iiint (y^2 + z^2) dm + \iiint (z^2 + x^2) dm \\ &\quad + \iiint (x^2 + y^2) dm - 3 \iiint (\eta^2 + \zeta^2) dm. \\ &= A + B + C - 3I. \end{aligned} \quad (17.24)$$

其中 I 为地球相对于 OQ 轴的转动惯量。

$$\begin{aligned} I_3 &= \iiint (5\xi^3 - 3\xi r^2) dm \\ &= \iiint [5(lx + my + nz)^3 \\ &\quad - 3(lx + my + nz)(x^2 + y^2 + z^2)] dm. \end{aligned}$$

将上式中的括号展开后，每一项都为 x, y, z 的三次式，按(17.17)

式知各项积分为零，故

$$I_3 = 0 \quad (17.25)$$

在通常情况下，只需精确到 $\frac{r}{\rho}$ 或 $\frac{\xi}{\rho}$ 的三次幂就符合精度要求了，故 I_4 以上的项就不需再展开。将(17.22)式，(17.23)式，(17.24)式和(17.25)式代入力函数展开式(17.21)得

$$U = GM \left(\frac{E}{\rho} + \frac{A+B+C-3I}{2\rho^3} \right). \quad (17.26)$$

为使力函数 U 的含义更明确，还需对转动惯量 I 进行分析，利用方向余弦的性质 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ，可得

$$\begin{aligned} I &= \iiint (\eta^2 + \zeta^2) dm = \iiint (r^2 - \xi^2) dm \\ &= \iiint [(l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (lx + my + nz)^2] dm \\ &= \iiint [l^2(y^2 + z^2) + m^2(x^2 + z^2) + n^2(x^2 + y^2) - 2lmxy \\ &\quad - 2mnyz - 2lnxz] dm. \end{aligned}$$

按(17.16)式，上式中后三项积分为零，因此

$$\begin{aligned} I &= \iiint l^2(y^2 + z^2) dm + \iiint m^2(x^2 + z^2) dm \\ &\quad + \iiint n^2(x^2 + y^2) dm \\ &= l^2A + m^2B + n^2C \\ &= A - (A - B)m^2 + (C - A)n^2. \end{aligned} \quad (17.27)$$

假设天体 Q 在 O - XYZ 系内的坐标为 x, y, z ，则 $m = \frac{y}{\rho}$ ， $n = \frac{z}{\rho}$ 。故地球对天体 Q 吸引所产生的力函数可近似表为

$$U = GM \left(\frac{E}{\rho} + \frac{B+C-2A}{2\rho^3} + \frac{3(A-B)y^2 - 3(C-A)z^2}{2\rho^5} \right). \quad (17.28)$$

由此可见, 地球为旋转椭球体时对外面天体吸引产生的力函数与地球的形状, 密度分布等有关, 仅在第一次近似(即取第一项)时才可将地球视为质点。按(17.28)式地球对外面任一天体吸引的力函数都有相同的形式, 如果 Q 为月球, 则(17.28)式中的 M , ρ , (x, y, z) 分别表示月球的质量, 月地距离以及月球的地心坐标。若 Q 为太阳, 则可换以相应的太阳的量。在同时考虑日, 月的吸引时, 按力函数标量叠加的性质, (17.28)式应写成相应的日, 月项的和。

§ 17.3 N 体问题的积分

§ 17.1 中, 已经给出 N 体问题的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= Gm_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \right) = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \\ m_i \ddot{\eta}_i &= Gm_i \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \right) = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ m_i \ddot{\zeta}_i &= Gm_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \right) = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (i=1, 2, \dots, n) \\ (i \neq j) \end{array} \quad (17.29)$$

其中力函数 U 为

$$U = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \right). \quad (17.30)$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2}. \quad (17.31)$$

(17.29)式为 $3n$ 个二阶微分方程组, 它的完全解应为 $6n$ 个独立的积分。由数学分析知识可知, 所谓 N 体问题微分方程的一个积分是指包含 N 体的坐标、坐标的导数甚至时间变量的一种函数关系式, 这种函数关系在任意时刻都满足 N 体问题的微分方程组并仅依赖于一个任意参数, 因此, 如果已知微分方程组的一个积分,

则方程组至少可降低一阶。由于 N 体问题仅考虑 N 体相互之间的吸引力，而不考虑任何外力作用，因此是一个守恒力系。根据力学的知识， N 体系统也应满足动量守恒，动量矩守恒和能量守恒原理，且其质心应作匀速直线运动。

一、动量积分和质量中心运动定理

根据 § 17.1 的讨论，利用 (17.30) 式和 (17.31) 式可将运动方程组 (17.29) 式改写为

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= -G \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\xi_i - \xi_j), \\ m_i \ddot{\eta}_i &= -G \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\eta_i - \eta_j), \\ m_i \ddot{\zeta}_i &= -G \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\zeta_i - \zeta_j). \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (i=1, 2, \dots, n) \\ (i \neq j) \end{array} \quad (17.32)$$

上式对 N 体系统中任一天体皆成立。若将上式对 i 求和可得

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\xi}_i = -G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\xi_i - \xi_j). \quad (i \neq j)$$

η_i, ζ_i 也有与此类似的形式。上式 i, j 都是从 1 到 n 求和，因此，右端任一项都有另一项与其大小相等，符号相反而相互抵消，使满足

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\xi}_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\eta}_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\zeta}_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.33)$$

同理

上式对时间 t 积分一次得

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\xi}_i = a_1, \quad \sum_{i=1}^n m_i \dot{\eta}_i = b_1, \quad \sum_{i=1}^n m_i \dot{\zeta}_i = c_1. \quad (17.34)$$

式中 a_1, b_1, c_1 皆为常数, 上式称为 N 体系统的动量积分即动量守恒关系。

(17.34) 式再对 t 积分一次得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \xi_i &= a_1 t + a_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i \eta_i &= b_1 t + b_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i \zeta_i &= c_1 t + c_2. \end{aligned} \right\} \quad (17.35)$$

其中 a_2, b_2, c_2 为另外三个独立的积分常数。

设 N 体系统的质心在惯性坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 中的坐标为 (ξ, η, ζ) , N 体的总质量 $M = \sum_{i=1}^n m_i$, 则按质心定义有

$$M\xi = \sum_{i=1}^n m_i \xi_i, \quad M\eta = \sum_{i=1}^n m_i \eta_i, \quad M\zeta = \sum_{i=1}^n m_i \zeta_i$$

以此代入 (17.35) 式得

$$M\xi = a_1 t + a_2, \quad M\eta = b_1 t + b_2, \quad M\zeta = c_1 t + c_2. \quad (17.36)$$

(17.36) 式即为质量中心运动积分, 它表明 N 体系统在引力作用下, 其质量中心作匀速直线运动。

二、动量矩积分

如果将运动方程组 (17.32) 式的第二式乘以 ξ_i , 第一式乘以 η_i , 再两式相减可得

$$\begin{aligned} & m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \eta_i \ddot{\xi}_i) \\ &= G m_i \sum_{j=1}^n \left[\frac{m_j \eta_i (\xi_i - \xi_j)}{\Delta_{ij}^3} - \frac{m_j \xi_i (\eta_i - \eta_j)}{\Delta_{ij}^3} \right] \end{aligned}$$

上式对所有的 i 求和得

$$\sum_{i=1}^n m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \eta_i \ddot{\xi}_i) = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^3} (\xi_i \eta_j - \eta_i \xi_j)$$

显然, 由于 i, j 都是从 1 到 n 求和, 上式右端的每一项也必有一个对应项与其相抵消, 因此

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \eta_i \ddot{\xi}_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i (\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i (\zeta_i \ddot{\xi}_i - \xi_i \ddot{\zeta}_i) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

同理可得

将上面三式对时间 t 积分一次得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) &= d_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) &= d_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) &= d_3. \end{aligned} \right\} \quad (17.37)$$

d_1, d_2, d_3 分别为三个独立的积分常数。(17.37)式可写成矢量的形式

$$\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{h}. \quad (17.38)$$

(17.37)式或(17.38)式称为 N 体问题的总动量矩积分, (17.38)式中的 $\mathbf{v}(\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i)$ 表示任意第 i 个天体的速度, $\mathbf{h}(d_1, d_2, d_3)$ 表示 N 体系统的总动量矩矢量, $\mathbf{h}$ 是一个常矢量, 它的分量为积分常数 d_1, d_2, d_3 。

三、能量积分

将运动方程组(17.32)式中的三个方程依次乘以 $\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$, 然后再相加并对 i 求和后可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n [m_i(\ddot{\xi}_i \dot{\xi}_i + \ddot{\eta}_i \dot{\eta}_i + \ddot{\zeta}_i \dot{\zeta}_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\dot{\xi}_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \dot{\eta}_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \right). \end{aligned}$$

按力函数的定义, U 仅为坐标的函数, 故上式可写为

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = \frac{dU}{dt}.$$

上式两边对 t 积分可得

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = U + E. \quad (17.39)$$

而 N 体系统的总动能 $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2)$, 故可将上式记为

$$T - U = E. \quad (17.40)$$

力函数 U 是系统总势能的反号, 故上式为系统的总能量积分, E 为积分常数, 又称为能量积分常数。

综上所述, 已得到了 N 体问题的十个积分, 它们包含有十个相互独立的积分常数 ($a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, d_1, d_2, d_3, E$)。这些积分都是通过对时间 t 的一次积分而得到的, 往往称这十个积分为 N 体问题的十个首次积分或初积分。

法国数学家庞加莱 (J. H. Poincaré) 早已证明: N 体系统除上述十个初积分外, 没有其他单值解析积分。由于十个积分的存在, 可使 N 体问题由 $6n$ 阶方程组降为 $6n-10$ 阶。当 $N=2$ 时, 方程组可降至二阶。由上一章可知, 二体问题的运动方程完全可积, 已经求出全部的解。但对于 $N>2$ 时的任何 N 体问题都未能严格解出, 而只能近似求解。长期以来, 寻求 N 体问题的新积分, 探讨各种有效的近似解法等等一直是天体力学中的相当重要而困难的课题。

§ 17.4 用直角坐标表示的 摄动运动方程

前面几节已经得出了 N 体问题在空间惯性坐标系中的运动方程和它的十个初积分。但是，在实际问题中经常采用相对坐标系来讨论，例如，在太阳系中行星都是围绕着太阳运动，对于由大行星和太阳组成的 N 体问题最好是采用以太阳为原点的相对坐标系，下面就来推出在以太阳为原点的相对直角坐标系中的 N 体运动方程。

设太阳 P_0 和其他 $n-1$ 个天体 $P_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ 组成 n 体系统，它们的质量分别为 $m_0, m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ ，它们在空间惯性直角坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 系中的坐标分别为 $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0), (\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \dots, (\xi_i, \eta_i, \zeta_i), \dots, (\xi_{n-1}, \eta_{n-1}, \zeta_{n-1})$ 。在 § 17.1 中已列出在此坐标系中任一天体 P_i 的运动方程(17.6)式。现在将坐标原点平移到太阳 P_0 上，建立以太阳为原点，坐标轴平行于 $O-\xi\eta\zeta$ 系的相对直角坐标系 P_0-xyz (见图 17.4)，则太阳和其他 $n-1$ 个天体在此坐标系内的坐标为 $(x_0, y_0, z_0), (x_i, y_i, z_i), (i=1, 2, \dots, n-1)$ ，且 $x_0=y_0=z_0=0$ 。

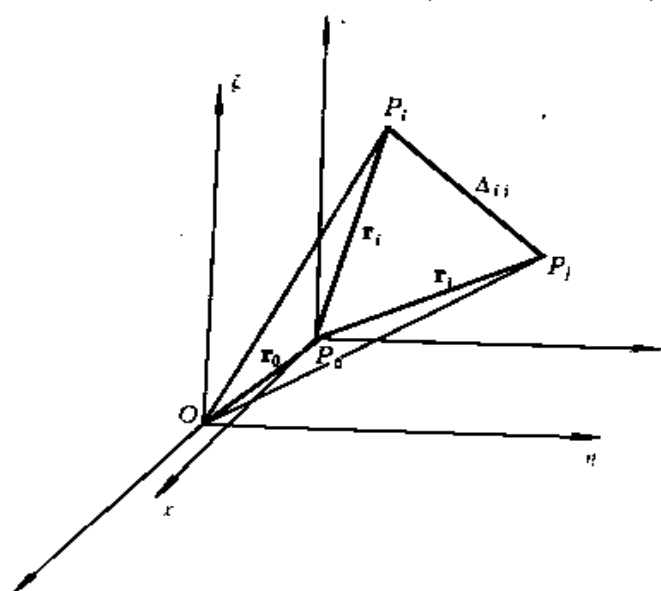


图 17.4 相对直角坐标系中的运动方程

系内的坐标为 $(x_0, y_0, z_0), (x_i, y_i, z_i), (i=1, 2, \dots, n-1)$ ，且 $x_0=y_0=z_0=0$ 。

新旧坐标之间具有关系式

$$\xi_i = \xi_0 + x_i, \quad \eta_i = \eta_0 + y_i, \quad \zeta_i = \zeta_0 + z_i. \quad (17.41)$$

$$\xi_i - \xi_j = x_i - x_j, \quad \eta_i - \eta_j = y_i - y_j, \quad \zeta_i - \zeta_j = z_i - z_j. \quad (17.42)$$

因此

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ij} &= \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \\ \Delta_{0i} &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_i} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (i=1, 2, \dots, n-1) \\ (i \neq j) \end{aligned} \quad (17.43)$$

$$\begin{aligned} \text{令} \quad r_i &= \Delta_{0i} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \\ r_j &= \Delta_{0j} = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}. \end{aligned}$$

太阳 P_0 在 $O-\xi\eta\zeta$ 系中的运动方程(消去质量 m_0)为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_0 &= G \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j x_j}{r_j^3} = G \frac{m_i x_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} \frac{m_j x_j}{r_j^3}, \\ \ddot{\eta}_0 &= G \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j y_j}{r_j^3} = G \frac{m_i y_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} \frac{m_j y_j}{r_j^3}, \\ \ddot{\zeta}_0 &= G \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j z_j}{r_j^3} = G \frac{m_i z_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} \frac{m_j z_j}{r_j^3}. \end{aligned} \right\} \quad (17.44)$$

而其他任一天体 P_i 在 $O-\xi\eta\zeta$ 系中的运动方程(消去质量 m_i)也写为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_i &= -G \frac{m_0 x_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \ddot{\eta}_i &= -G \frac{m_0 y_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \ddot{\zeta}_i &= -G \frac{m_0 z_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3}. \end{aligned} \right\} (j \neq i) \quad (17.45)$$

利用(17.41)式可得

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{x}_i &= \ddot{\xi}_i - \ddot{\xi}_0 \\
 &= -G(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left(\frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right), \\
 \ddot{y}_i &= \ddot{\eta}_i - \ddot{\eta}_0 \\
 &= -G(m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left(\frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right), \\
 \ddot{z}_i &= \ddot{\zeta}_i - \ddot{\zeta}_0 \\
 &= -G(m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left(\frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right).
 \end{aligned} \right\} (j \neq i) \quad (17.46)$$

(17.46) 式为在相对坐标系中 N 体问题的运动方程。它的每项都有明显的力学意义: $(\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i)$ 表示第 i 个行星在相对坐标系中所具有的总的加速度; 方程右端的第一项 $\left(-Gm_0 \frac{x_i}{r_i^3}, -Gm_0 \frac{y_i}{r_i^3}, -Gm_0 \frac{z_i}{r_i^3}\right)$ 表示在太阳的引力作用下行星 P_i 所产生的加速度; 第二项 $\left(-Gm_i \frac{x_i}{r_i^3}, -Gm_i \frac{y_i}{r_i^3}, -Gm_i \frac{z_i}{r_i^3}\right)$ 表示在行星 P_i 的作用下, 太阳运动所具有的牵连加速度。第三项 $\left(\sum_{j=1}^{n-1} Gm_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3}, \sum_{j=1}^{n-1} Gm_j \frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3}, \sum_{j=1}^{n-1} Gm_j \frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3}\right)$ 表示行星 P_i 在其他 $n-2$ 个行星的引力作用下所具有的加速度; 第四项 $\left(-G \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j x_j}{r_j^3}, -G \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j y_j}{r_j^3}, -G \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j z_j}{r_j^3}\right)$ 为太阳受其他 $n-2$ 个行星吸引所产生的牵连加速度。综上所述, 该行星在相对坐标系中所具有的加速度是它受太阳和其他 $n-2$ 个行星的吸引所产生的绝对加速度与太阳受所有 $n-1$ 个行星的吸引而产生的牵连加速度的合成加速度。

根据 Δ_{ij} 的定义, (17.46) 式可写为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i + G(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} &= \sum_{j=1}^{n-1} Gm_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} \right) - \sum_{j=1}^{n-1} Gm_j \frac{x_j}{r_j^3}, \\ \ddot{y}_i + G(m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} &= \sum_{j=1}^{n-1} Gm_j \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} \right) - \sum_{j=1}^{n-1} Gm_j \frac{y_j}{r_j^3}, \\ \ddot{z}_i + G(m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} &= \sum_{j=1}^{n-1} Gm_j \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} \right) - \sum_{j=1}^{n-1} Gm_j \frac{z_j}{r_j^3}. \end{aligned} \right\} (j \neq i) \quad (17.47)$$

引入函数 R_{ij} , 它的表达式为

$$R_{ij} = Gm_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right). \quad (17.48)$$

代入(17.47)式得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i + \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} x_i &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i}, \\ \ddot{y}_i + \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} y_i &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial R_{ij}}{\partial y_i}, \\ \ddot{z}_i + \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} z_i &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial R_{ij}}{\partial z_i}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (i=1, 2, \dots, n) \\ (j \neq i) \end{array} \quad (17.49)$$

(17.49)式为用直角坐标表示的行星摄动运动方程, 上式中的左端为在仅考虑太阳和行星 P_i 之间的吸引而产生的加速度; 右端为其他行星引力所产生的加速度。在太阳系中, 太阳的质量占整个太阳系的 99.5%, 其他行星的吸引力与太阳的吸引力相比是很小的, 因此, 把太阳对行星 P_i 的吸引力称为中心引力, 把其他行星的引力称为摄动力, 函数 R_{ij} 称为摄动函数。在讨论行星 P_i 在太阳中心引力和其他行星摄动力作用下的运动时, 称 P_i 为被摄动行星, 称其他 $(n-2)$ 颗行星 $P_j (j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-1;$

$j \neq i$) 为摄动行星。由 R_{ij} 的定义可知, 当 $m_j=0$ 时, $R_{ij}=0$, 此时 (17.49) 式右端为零, 即为行星 P_i 和太阳所组成的二体问题的运动方程, 因此, 二体问题又称为无摄运动问题。如果 $m_j \neq 0$, 则由于 R_{ij} 是标量, 可以叠加, 存在几个摄动行星 m_j 就有几项摄动函数相加, 如五体问题摄动行星应有三个, 就有三项摄动函数相加, 依此类推。

§ 17.5 三体问题的摄动运动方程

在上节的基础上, 本节以三体问题为例来进一步描述 N 体问题的摄动运动方程。

一、在相对直角坐标系中三体问题的摄动运动方程

设太阳 S 和行星 P_1, P_2 组成三体问题, 它们的质量分别为 M, m_1 和 m_2 , 在以太阳 S 为原点的相对直角坐标系 $S-xyz$ 中, P_1, P_2 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 。根据 N 体问题的摄动运动方程 (17.49) 式, 可给出 P_1, P_2 相对于太阳的摄动运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{G(M+m_1)}{r_1^3} x_1 &= -\frac{\partial R_1}{\partial x_1}, \\ \ddot{y}_1 + \frac{G(M+m_1)}{r_1^3} y_1 &= -\frac{\partial R_1}{\partial y_1}, \\ \ddot{z}_1 + \frac{G(M+m_1)}{r_1^3} z_1 &= -\frac{\partial R_1}{\partial z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (17.50)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_2 + \frac{G(M+m_2)}{r_2^3} x_2 &= -\frac{\partial R_2}{\partial x_2}, \\ \ddot{y}_2 + \frac{G(M+m_2)}{r_2^3} y_2 &= -\frac{\partial R_2}{\partial y_2}, \\ \ddot{z}_2 + \frac{G(M+m_2)}{r_2^3} z_2 &= -\frac{\partial R_2}{\partial z_2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.51)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= Gm_2 \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} \right), \\ R_2 &= Gm_1 \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^3} \right), \\ r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \\ r_{12} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.52)$$

当讨论 P_1 的摄动运动时, R_1 为摄动函数, (17.50) 式为摄动运动方程, P_2 为摄动行星。当讨论 P_2 的摄动运动时, R_2 为摄动函数, P_1 为摄动行星, (17.51) 式为摄动运动方程。可见要完全解决三体问题必须联合求解 (17.50) 和 (17.51) 式两组方程。迄今为止, 这一问题尚无法直接求解, 而只能在一定条件下给出近似解。

二、雅可比坐标系中三体问题的运动方程

在理论讨论中, 特别是在月球运动理论中常采用一种雅可比坐标系, 在这种坐标系中天体的相对运动方程具有对称形式。下面就来推导雅可比坐标系中的三体问题运动方程。

设质量分别为 m_0, m_1, m_2 的三天体 P_0, P_1, P_2 组成三体问题, P_1 相对于以 P_0 为原点的直角坐标系 $P_0-x_1y_1z_1$ 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) , 又以 P_0, P_1 的质量中心 C 为原点, 建立平行于 $P_0-x_1y_1z_1$ 的坐标系 $C-x_2y_2z_2$, P_2 在此坐标系内的坐标为 (x_2, y_2, z_2) , (见图 17.5)。如果在以三体质量中心 O 为原点的惯性坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 中, P_0, P_1, P_2 的坐标为 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (i=0, 1, 2)$ 。 C 点的坐标为 $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, 则有关系式

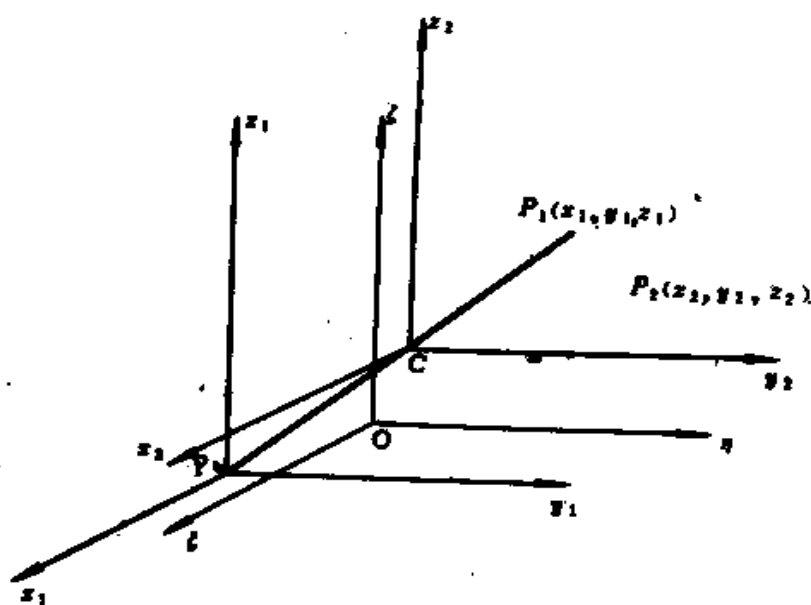


图 17.5 雅可比坐标系

$$\left. \begin{aligned} m_0 \xi_0 + m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 &= 0, \\ m_0 \eta_0 + m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 &= 0, \\ m_0 \zeta_0 + m_1 \zeta_1 + m_2 \zeta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.53)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= -\frac{m_0}{m_0 + m_1} \xi_0 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \xi_1, \\ \bar{\eta} &= -\frac{m_0}{m_0 + m_1} \eta_0 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \eta_1, \\ \bar{\zeta} &= -\frac{m_0}{m_0 + m_1} \zeta_0 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \zeta_1. \end{aligned} \right\} \quad (17.54)$$

根据坐标系 $P_0-x_1y_1z_1$ 和 $C-x_2y_2z_2$ 的定义可得

$$x_1 = \xi_1 - \xi_0, \quad y_1 = \eta_1 - \eta_0, \quad z_1 = \zeta_1 - \zeta_0. \quad (17.55)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \xi_2 - \bar{\xi} = \xi_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \xi_0 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \xi_1, \\ y_2 &= \eta_2 - \bar{\eta} = \eta_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \eta_0 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \eta_1, \\ z_2 &= \zeta_2 - \bar{\zeta} = \zeta_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \zeta_0 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \zeta_1. \end{aligned} \right\} \quad (17.56)$$

设三体的总质量为 $M = m_0 + m_1 + m_2$, 则由(17.53), (17.55)和(17.56)三式可解得

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= -\frac{m_1}{m_0+m_1}x_1 - \frac{m_2}{M}x_2, \\ \xi_1 &= \frac{m_0}{m_0+m_1}x_1 - \frac{m_2}{M}x_2, \\ \xi_2 &= \frac{m_0+m_1}{M}x_2. \end{aligned} \right\} \quad (17.57)$$

$\eta_0, \zeta_0, \eta_1, \zeta_1$ 和 η_2, ζ_2 的方程可类似地推出。

在 $O-\xi\eta\zeta$ 系中三体问题的力函数可表为

$$U = \frac{Gm_0m_1}{\Delta_{10}} + \frac{Gm_0m_2}{\Delta_{20}} + \frac{Gm_1m_2}{\Delta_{12}}. \quad (17.58)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{10} &= \sqrt{(\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 + (\zeta_1 - \zeta_0)^2}, \\ \Delta_{20} &= \sqrt{(\xi_2 - \xi_0)^2 + (\eta_2 - \eta_0)^2 + (\zeta_2 - \zeta_0)^2}, \\ \Delta_{12} &= \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.59)$$

以(17.57)式代入上式, 可将 $\Delta_{10}, \Delta_{20}, \Delta_{12}$ 表为相对坐标的函数, 即 $\Delta_{10} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$,

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{20} &= \sqrt{\left(x_2 + \frac{m_1}{m_0+m_1}x_1\right)^2 + \left(y_2 + \frac{m_1}{m_0+m_1}y_1\right)^2 + \left(z_2 + \frac{m_1}{m_0+m_1}z_1\right)^2}, \\ \Delta_{12} &= \sqrt{\left(x_2 - \frac{m_0}{m_0+m_1}x_1\right)^2 + \left(y_2 - \frac{m_0}{m_0+m_1}y_1\right)^2 + \left(z_2 - \frac{m_0}{m_0+m_1}z_1\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.60)$$

因此, 力函数 U 也可表为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 的函数。

又在惯性坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 中, 三体问题的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \\ m_i \ddot{\eta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ m_i \ddot{\zeta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \end{aligned} \right\} (i=0, 1, 2) \quad (17.61)$$

利用(17.55), (17.56)和(17.61)式可得下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_0 = \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial \xi_1} - \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial \xi_0}, \\ \ddot{x}_2 &= \ddot{\xi}_2 - \ddot{\xi} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial \xi_2} - \frac{1}{m_0 + m_1} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_0} + \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \right). \end{aligned} \right\} (17.62)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi_0} + \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_0} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_0} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_0} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{\partial U}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{\partial U}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} (17.63)$$

将(17.63)式代入(17.62)式得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{1}{m_0 + m_1} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ &\quad + \frac{1}{m_0 + m_1} \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \frac{\partial U}{\partial x_1}, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{1}{m_0 + m_1} \left[-\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right] \\ &= \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_2(m_0 + m_1)} \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{M}{m_2(m_0 + m_1)} \frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} (17.64)$$

令
$$\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_2 (m_0 + m_1)}{M}.$$

μ_1, μ_2 称为 P_1, P_2 的折合质量, (17.64) 式可简化为

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \ddot{x}_1 &= -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \\ \mu_2 \ddot{x}_2 &= -\frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.65)$$

同理也可得 y_1, z_1, y_2, z_2 的方程。最终, 在雅可比坐标系内 P_1, P_2 的运动方程可表为

$$\left. \begin{aligned} \mu_i \ddot{x}_i &= -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ \mu_i \ddot{y}_i &= -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ \mu_i \ddot{z}_i &= -\frac{\partial U}{\partial z_i}. \end{aligned} \right\} (i=1, 2) \quad (17.66)$$

(17.66) 式为对称形式的运动方程组。 x_i, y_i, z_i 称为雅可比坐标, 这种坐标和运动方程的形式可以推广到 $N (N > 3)$ 体的情况。

在讨论月球运动时, 常常采用雅可比坐标来表示月球的运动方程。设 M, E, S 表示月球, 地球和太阳在同一时刻的位置和质量, 如图 17.6 所示。现以地球质量中心为原点, 建立空间直角坐标

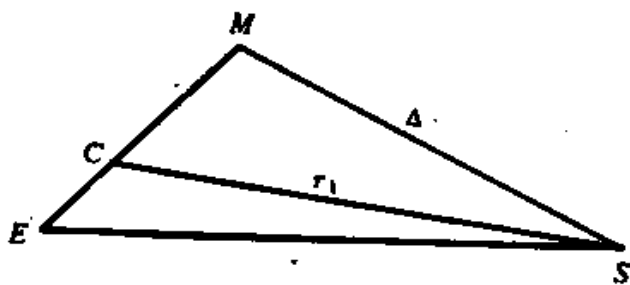


图 17.6 月球的运动方程

系, r, x, y, z 为月球在此坐标系中的向径和坐标; r', x', y', z' 为太阳的向径和坐标, Δ 表示日月距离, 则有

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ \Delta^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \end{aligned}$$

按三体问题在直角坐标系中的摄动运动方程(17.50), 将太阳视为摄动天体, 则月球相对于地球的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{G(M+E)}{r^3} x &= GS \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right), \\ \ddot{y} + \frac{G(M+E)}{r^3} y &= GS \left(\frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y'}{r'^3} \right), \\ \ddot{z} + \frac{G(M+E)}{r^3} z &= GS \left(\frac{z' - z}{\Delta^3} - \frac{z'}{r'^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17.67)$$

设 C 为地月系质量中心, 以 C 为原点作平行于 $O-xyz$ 的坐标系 $C-x_1y_1z_1$, 太阳 S 在此坐标系中的向径和坐标为 r_1, x_1, y_1, z_1 。由此, 太阳 S 在两个坐标系中的坐标 (x', y', z') 和 (x_1, y_1, z_1) 之间有如下关系(见图 17.6),

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x' - \frac{M}{E+M} x, \\ y_1 &= y' - \frac{M}{E+M} y, \\ z_1 &= z' - \frac{M}{E+M} z. \end{aligned} \right\} \quad (17.68)$$

太阳与地月系质量中心 C 之间的距离 r' 和日月距离 Δ 用 (x_1, y_1, z_1) 和 (x, y, z) 来表示, 应为

$$\left. \begin{aligned} r'^2 &= \left(x_1 + \frac{M}{E+M} x \right)^2 + \left(y_1 + \frac{M}{E+M} y \right)^2 \\ &\quad + \left(z_1 + \frac{M}{E+M} z \right)^2, \\ \Delta^2 &= \left(x_1 - \frac{E}{E+M} x \right)^2 + \left(y_1 - \frac{E}{E+M} y \right)^2 \\ &\quad + \left(z_1 - \frac{E}{E+M} z \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (17.69)$$

方程组(17.67)式右端也可表为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x, y, z) 的函数

$$\begin{aligned}
\text{即} \quad & GS\left(\frac{x'-x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) \\
&= GS\left(\frac{x_1 - \frac{E}{E+M}x}{\Delta^3} - \frac{x_1 + \frac{M}{E+M}x}{r'^3}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} GS\left(\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{E+M}{E} + \frac{1}{r'} \cdot \frac{E+M}{M}\right),
\end{aligned}$$

同理可推得 y, z 方向的式子。若令

$$\begin{aligned}
R &= GS\left(\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{E+M}{E} + \frac{1}{r'} \cdot \frac{E+M}{M}\right) \\
&= \frac{GS(E+M)}{EM} \left(\frac{M}{\Delta} + \frac{E}{r'}\right), \tag{17.70}
\end{aligned}$$

则可将月球的运动方程(17.67)式写为

$$\left. \begin{aligned}
\ddot{x} + \frac{G(E+M)}{r^3}x &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\
\ddot{y} + \frac{G(E+M)}{r^3}y &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\
\ddot{z} + \frac{G(E+M)}{r^3}z &= \frac{\partial R}{\partial z}.
\end{aligned} \right\} \tag{17.71}$$

函数 R 为月球运动时受太阳引力而产生的摄动函数。由(17.71)式可看出此方程的形式与在直角坐标系中的三体问题的摄动运动方程相似，只是摄动函数 R 中的摄动天体质量用折合质量来代替，坐标用摄动体在相对于中心体和被摄动体的质量中心直角坐标系中的坐标来表示。

§ 17.6 限制性三体问题

一般三体问题经常采用数值方法或摄动理论方法近似求解。此外，还可以根据天体的实际情况，从理论上提出一些近似模型，对这些模型的性质和特解的研究将给出求解特殊的多体系统的实

例，并为进一步讨论一般三体问题提供依据。在天体力学中最重要的一种近似模型称为限制性三体问题。本节介绍这个模型的基本概念。

限制性三体问题首先是从太阳系实际情况提出来的，后来也应用于双星、小恒星系统等情况。在太阳系中有很多质量非常小的天体，如小行星、卫星、彗星和流星等，它们对于其他天体的引力可以忽略不计。在双星或小恒星系统中，星体周围的星周物质与主星体的质量相比非常小，因此也可以不考虑它们对主星体的引力。按照这些实际天体的状况提出了限制性三体问题的力学模型，即：

若 P_1 , P_2 和 P 三个天体组成三体问题，它们的质量分别为 m_1 , m_2 和 m ，设 m 为无穷小量，以致 P 对 P_1 , P_2 的吸引可以不计。在讨论 P 的运动时，仅需考虑 P_1 , P_2 之间的吸引和它们对于 P 的吸引，这样一种三体问题称为限制性三体问题。往往称 P_1 , P_2 为有限体， P 为无穷小天体。当 $m_1 > m_2$ 时，称 m_1 为大天体或主星体，称 m_2 为小天体或伴星体。由于不必考虑 P 对 P_1 , P_2 的引力作用，两个有限体在相互引力作用下的运动问题可视为二体问题，其轨道是圆锥曲线，利用二体问题的结果，两个有限体的运动规律可以完全解出，它们的坐标和速度可以表示为时间的已知函数。由此可见，限制性三体问题实质上是研究无限小天体 P 在有限体 P_1 和 P_2 的万有引力作用下的运动规律。

依据二体问题的不同类型轨道，限制性三体问题也可分为圆、椭圆、抛物线和双曲线等四种类型，也就是圆型限制性三体问题、椭圆型限制性三体问题、抛物线型限制性三体问题和双曲线型限制性三体问题。若初始时刻小天体的位置和速度都在两个有限体绕转平面上，则小天体将永远在此轨道平面上运动，这就构成平面圆型限制性三体问题，一般情况称为空间限制性三体问题。同

样, 按圆锥曲线轨道的不同类型, 平面或空间限制性三体问题也可以分为四种不同的类型。在这些类型中, 圆型或椭圆型限制性三体问题讨论得最深入, 应用也比较广泛。本节讨论圆型限制性三体问题。

如图 17.7 所示, P_1 , P_2 和 P 分别表示质量为 m_1 , m_2 和 m 的三体, m_1 , m_2 的相互绕转轨道为圆。 $O-\xi\eta\zeta$ 为空间惯性直角坐标系, O 点为 P_1 , P_2 的质量中心, $\xi\eta$ 平面与 P_1 , P_2 的相互绕转圆轨道平面相重合, $\overline{O\xi}$ 轴转向 $\overline{O\eta}$ 轴时同 P_1 , P_2 的运动方向一致, $\overline{O\xi}$ 轴垂直于 $\xi\eta$ 平面并与 $\overline{O\xi}$, $\overline{O\eta}$ 成右手正交系。设 m_1 , m_2 和 m 的坐标为 (ξ_1, η_1, ζ_1) , (ξ_2, η_2, ζ_2) 和 (ξ, η, ζ) , 此圆型限制性三体问题的力函数可写为

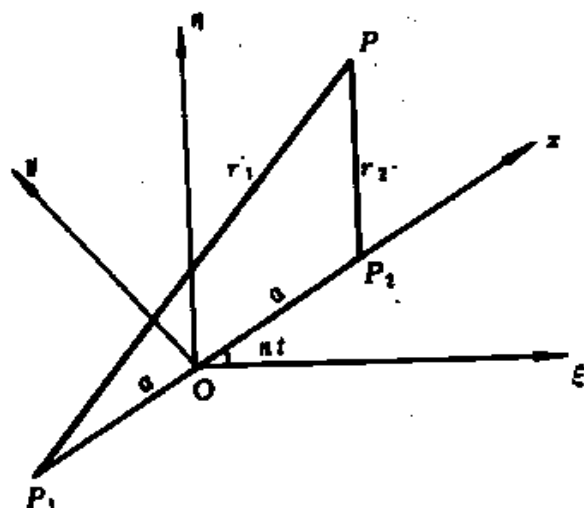


图 17.7 圆型限制性三体问题

$$U = \frac{Gm_1m}{r_1} + \frac{Gm_2m}{r_2} \quad (17.72)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + (\zeta - \zeta_2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.73)$$

无穷小质点 P 的运动方程可由力函数 U 表出:

$$m\ddot{\xi} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad m\ddot{\eta} = -\frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad m\ddot{\zeta} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta} \quad (17.74)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= -G \frac{m_1(\xi - \xi_1)}{r_1^3} - G \frac{m_2(\xi - \xi_2)}{r_2^3}, \\ \ddot{\eta} &= -G \frac{m_1(\eta - \eta_1)}{r_1^3} - G \frac{m_2(\eta - \eta_2)}{r_2^3}, \\ \ddot{\zeta} &= -G \frac{m_1\zeta}{r_1^3} - G \frac{m_2\zeta}{r_2^3}. \end{aligned} \right\} \quad (17.75)$$

显然，在 $O-\xi\eta\zeta$ 系中，由于三体都在运动，故三体的坐标都是时间 t 的函数，从而使(17.75)式的右端也为时间 t 的函数，这样就会造成积分上的困难。为避免这个问题，又选取旋转坐标系 $O-xyz$ (见图 17.7)，在此坐标系中 $\overline{Oz}$ 轴与 $\overline{O\zeta}$ 轴重合， $\overline{Ox}$ 轴沿 P_1, P_2 的联线方向指向 m_2 为正并随 P_1, P_2 一起旋转。假设在 $t=0$ 时， $\overline{Ox}$ 、 $\overline{Oy}$ 分别与 $\overline{O\xi}$ 、 $\overline{O\eta}$ 重合， P_1, P_2 相互绕转的角速度为 n ，则在任一时刻 t ， x 轴从 ξ 轴旋转了一个角度 nt ，利用坐标系旋转的公式可得 P 的新坐标 (x, y, z) 与 (ξ, η, ζ) 之间的关系

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos nt - y \sin nt, \\ \eta &= x \sin nt + y \cos nt, \\ \zeta &= z. \end{aligned} \right\} \quad (17.76)$$

为运算方便起见，可以选用无量纲变量来简化上列运动方程及其他关系式，如果选取 $m_1 + m_2 = 1$ 作为质量单位， P_1, P_2 之间的距离，即圆轨道半径 $a=1$ 为距离单位，并适当选取时间单位，使得万有引力常数 $G=1$ 。这个时间单位可由开普勒第三定律

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

来确定。

以 $a=1$ ， $m_1 + m_2 = 1$ 代入上式，再选取时间单位为 $\frac{2\pi}{T}$ ，其中 T 为 P_1, P_2 的圆轨道运动周期，由此可得角速度 $n=1$ 。

假设以 $\mu = m_2$ 代表较小的有限体 P_2 的质量, 则有 $m_1 = 1 - m_2 = 1 - \mu$ 。因为 P_1, P_2 在 Ox 轴上, 且 O 为 P_1, P_2 的质心, x 轴指向 P_2 为正, 则有

$$x_1 = -\mu, \quad x_2 = 1 - \mu, \quad y_1 = y_2 = 0, \quad z_1 = z_2 = 0. \quad (17.77)$$

综上所述, 将(17.76)式和(17.77)式代入方程组(17.75)式可得

$$\left. \begin{aligned} & (\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \cos t - (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \sin t \\ & = - \left\{ (1 - \mu) \frac{x - x_1}{r_1^3} + \mu \frac{x - x_2}{r_2^3} \right\} \cos t \\ & \quad + \left\{ \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right\} \sin t, \\ & (\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \sin t + (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \cos t \\ & = - \left\{ (1 - \mu) \frac{x - x_1}{r_1^3} + \mu \frac{x - x_2}{r_2^3} \right\} \sin t \\ & \quad - \left\{ \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right\} \cos t, \\ & \ddot{z} = - (1 - \mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}. \end{aligned} \right\} \quad (17.78)$$

消去(17.78)式前两式中的 t , 最终可得

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{x} - 2\dot{y} = x - (1 - \mu) \frac{x - x_1}{r_1^3} - \mu \frac{x - x_2}{r_2^3}, \\ & \ddot{y} + 2\dot{x} = y - (1 - \mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3}, \\ & \ddot{z} = - (1 - \mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}. \end{aligned} \right\} \quad (17.79)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.80)$$

定义函数 $\Omega = \Omega(x, y, z)$ 为

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \quad (17.81)$$

则方程组(17.79)式可改写为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (17.82)$$

(17.82)式为在旋转坐标系中圆型限制性三体问题的基本方程。在此方程组中，除小天体在旋转坐标系中的坐标 (x, y, z) 为基本变量外，其余都是常量且不显含时间 t 。函数 Ω 即为在旋转坐标系中小天体 P 受两有限体吸引而产生的力函数。

根据方程组(17.82)式很容易导出一个初积分。若以 $2\dot{x}$ 乘以第一式， $2\dot{y}$ 乘以第二式， $2\dot{z}$ 乘以第三式，而后相加可得

$$\begin{aligned} 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) &= 2\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\dot{z}\right) \\ &= 2\frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned}$$

两边对 t 积分可得

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\Omega - c. \quad (17.83)$$

或

$$v^2 = (x^2 + y^2) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - c. \quad (17.84)$$

其中， v 为小天体在旋转坐标系中的速度， c 为积分常数。这个积分为雅可比(K. G. J. Jacobi)首先发现，因此称为雅可比积分， c 称为雅可比积分常数。雅可比积分可以认为是在旋转坐标系中圆型限制性三体问题的能量积分，它在圆型限制性三体问题的研究中占很重要的地位。

§ 17.7 秤 动 解

由于力函数 Ω 的形式很复杂, 要直接求解运动方程组(17.82)式是相当困难的。但是, 可以根据方程组的特点找出某些特解。观察(17.82)式可知, 假设能寻找出某些点, 它们的坐标 (x, y, z) 在旋转坐标系 $O-xyz$ 中为常数, 且满足关系式

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \quad (17.85)$$

由于是常数, 这些点必然满足方程组(17.82)式, 也就是说这些点为这个运动方程组的特解。下面来寻找这些特解。

将 Ω 的表达式(17.81)式代入(17.85)式得

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-1+\mu) = 0, \quad (17.86)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = y - \frac{1-\mu}{r_1^3}y - \frac{\mu}{r_2^3}y = 0, \quad (17.87)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\frac{1-\mu}{r_1^3}z - \frac{\mu}{r_2^3}z = 0. \quad (17.88)$$

首先由(17.88)式可看出

$$z \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0.$$

由于括号内的值恒为正。故必须 $z=0$ 上式才能成立。由此可见, 所寻找的特解必定在 xy 平面上, 这样就使空间问题简化为平面问题, 即有

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.89)$$

再由(17.87)式可知

$$y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0$$

有两种情况可以使上式得到满足:

$$y=0, \quad (17.90)$$

或

$$1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0. \quad (17.91)$$

先来讨论(17.91)式的情况。如果将上式各项乘以 x 再减去(17.86)式即得关系式

$$\frac{(1-\mu)\mu}{r_1^3} + \frac{\mu(-1+\mu)}{r_2^3} = 0$$

亦即

$$\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} = 0$$

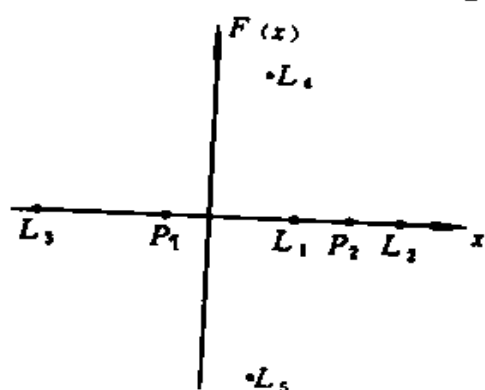
显然

$$r_1 = r_2$$

代入(17.91)式得

$$r_1 = r_2 = 1.$$

按所取的计量单位, P_1, P_2 之间的距离为 1, 上式表明, 满足这种条件的特解必然与 P_1, P_2 成等边三角形且在 xy 平面上, 这就



可得出对称于 x 轴的两点, 记为 $L_4(x_4, y_4, 0)$ 和 $L_5(x_5, y_5, 0)$, L_4 点在 x 轴上方, L_5 点在 x 轴下方(见图 17.8), 很容易计算出

$$x_4 = \frac{1}{2} - \mu, \quad y_4 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_5 = \frac{1}{2} - \mu, \quad y_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

当 μ 给定后, L_4, L_5 两点的坐标为常数。在初始时刻, 若无穷小天体 P 位于 L_4 或 L_5 , 且初始速度为零, 则 P 点就永远保留在 L_4 点或 L_5 点, 相对于 P_1, P_2 保持静止。而在绝对坐标系

$O-\xi\eta\zeta$ 中看起来, P 就与 P_1, P_2 一起在 xy 平面内旋转, 永远保持为一个等边三角形。通常把 L_4, L_5 这两个特解称为等边三角形解。

再来讨论当 $y=0$ 的情况, 此时, 距离 r_1, r_2 可取为

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+\mu)^2} = |x+\mu|, \\ r_2 &= \sqrt{(x-1+\mu)^2} = |x-1+\mu|. \end{aligned}$$

以此代入(17.86)式, 并令 $F(x)$ 为(17.86)式左端的函数, 则有

$$F(x) = x - \frac{1-\mu}{|x+\mu|^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{|x-1+\mu|^3}(x-1+\mu) = 0 \quad (17.92)$$

显然, 满足此方程的 x 轴上相应的点也是原方程的特解。对 $F(x)$ 进行分析就可找出代数方程(17.92)式的根。

从(17.92)式可看出, 函数 $F(x)$ 除在 $x=-\mu$ 及 $x=1-\mu$ 处不连续外, 在所有其它实数值处都连续。可以把 $F(x)$ 随 x 在整个实轴上的连续变化分成三段来讨论:

(1) 当 $-\infty < x < -\mu$ 时, 按(17.92)式, $F(-\infty) = -\infty < 0$, $F(x)$ 在 $(-\infty, -\mu)$ 内是连续的, 在此区间内 $x < -\mu < 1-\mu$, 故 $|x+\mu| = -(x+\mu)$, $|x-1+\mu| = -(x-1+\mu)$, 因而(17.92)式可表为

$$F(x) = x + \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2}$$

而
$$\frac{dF(x)}{dx} = 1 - \frac{2(1-\mu)}{(x+\mu)^3} - \frac{2\mu}{(x-1+\mu)^3} > 0$$

所以在区间 $(-\infty, -\mu)$ 内 $F(x)$ 为递增函数, 又当 x 从左边无限接近 $-\mu$, 即 $x = -\mu - 0$ 时, $F(x) = +\infty$, 即在此区间内, $F(x)$ 的值由 $-\infty$ 单调递增至 $+\infty$, $F(x) = 0$ 在此区间内有且仅有一个实根, 将这个根的坐标记为 $(x_3, 0, 0)$, 称为 L_3 点。

(2) 当 $-\mu < x < (1-\mu)$ 时, $|x+\mu| = x+\mu$, $|x-1+\mu| =$

$-(x-1+\mu)$, 代入(17.92)式得

$$F(x) = x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 1 + \frac{2(1-\mu)}{(x+\mu)^3} - \frac{2\mu}{(x-1+\mu)^3} > 0$$

当 x 从右边无限接近 $-\mu$, 即 $x = -\mu+0$ 时, $F(x) = -\infty$, 而当 $x = 1-\mu-0$ 时, $F(x) = +\infty$, 故在区间 $(-\mu, 1-\mu)$ 内, $F(x)$ 也是从 $-\infty$ 单调递增至 $+\infty$, $F(x)$ 在此区间内有且仅有一个实根, 在 x 轴上相应的点为 L_1 , 其坐标记为 $(x_1, 0, 0)$ 。

(3) 当 $(1-\mu) < x < +\infty$ 时, $|x+\mu| = x+\mu$, $|x-1+\mu| = x-1+\mu$, 此时

$$F(x) = x - \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 1 + \frac{2(1-\mu)}{(x+\mu)^3} + \frac{2\mu}{(x-1+\mu)^3} > 0$$

且 $F(1-\mu+0) = -\infty$, $F(+\infty) = +\infty$, 因此 $F(x)$ 在区间 $(1-\mu, +\infty)$ 内单调递增, 有且仅有一个实根, 记为 L_2 , 其坐标为 $(x_2, 0, 0)$ 。

由图 17.8 可看出, 上述三个特解 L_1, L_2, L_3 皆位在 x 轴上, 与 P_1, P_2 共线, 故称为共线解或直线解。

三个直线解的坐标 x_1, x_2, x_3 可以用级数展开方法求出, 或直接从计算机上用迭代法求出其近似结果, 由于无法严格表示, 往往 x_1, x_2, x_3 都展开为小参数 μ 的幂级数形式:

$$x_1 = 1 - \mu - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \frac{1}{3^2} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} + \dots$$

$$x_2 = 1 - \mu + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{3^2} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} - \dots$$

$$x_3 = -1 - \frac{5}{12}\mu + \frac{23 \times 7^2}{12^4}\mu^3 + \dots$$

x_1, x_2, x_3 的确切位置要根据 μ 的数值来确定, 详细的推导可参阅其它书籍^①。

当参数值 μ 给定后, L_1, L_2, L_3, L_4 和 L_5 这五个特解的坐标在旋转坐标系 $O-xyz$ 中都是常数, 且随着 P_1, P_2 一同旋转, 其相对位置不变。这些特解首先由拉格朗日求得, 因此常称为拉格朗日特解, 又称为称动解。

容易证明椭圆型限制性三体问题也只有五个特解, 虽然三个直线解之间的距离大小有变化, 但其比例保持不变, L_4, L_5 与 P_1, P_2 之间仍保持为等边三角形, 只是边长与圆型相比有些变化。利用椭圆型限制性三体问题的结果可在太阳系中找到等边三角形解的实际例子, 如, 著名的脱罗央群小行星(包括希腊人群)就是一个典型的例子, 已经发现这群小行星中有 15 颗小行星位于太阳、木星的等边三角形解附近, 其中 10 颗在平动点 L_4 附近, 5 颗在平动点 L_5 附近。这些小行星并没有严格位于 L_4, L_5 点上, 而是有大小不同程度的偏差, 在讨论它们的运动时, 就涉及到 L_4, L_5 的稳定性问题。天体力学的定性理论证明, 两个等边三角形解 L_4, L_5 是稳定的, 而三个直线解是不稳定的。因此, 至今尚未找到直线解的实际例子就不奇怪了。有人认为, 对日照现象就是聚集在太阳、地球的称动点 L_2 附近的尘埃质点反射太阳光形成的, 但这只是一种推测, 并不能作为可靠的实例。

§ 17.8 零速度面

在 § 17.6 中已得出圆型限制性三体问题的雅可比积分

$$v^2 = 2\Omega - C \quad (17.93)$$

其中
$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

^① 如赵进义编著的《天体力学》, 上海科技出版社, 1983 年版。

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}.$$

C 为雅可比积分常数, 按照微分方程知识, 积分常数 C 可由无穷小天体 P 的初始坐标和速度来决定。若给定 P 的初始条件和任意 t 时刻的位置, 则可由 (17.93) 式得出 P 在任意 t 时刻的速度值。反之, 若给定速度值 v 便可由积分 (17.93) 式来确定无穷小天体 P 在空间的运动区域。

由于小天体 P 的运动速度 $v^2 \geq 0$, 则由 (17.93) 式得

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C \geq 0 \quad (17.94)$$

(17.94) 式是对小天体 P 的运动范围的限制条件。显然, 小天体的坐标必须满足上述不等式才能保证 $v^2 \geq 0$; 否则, 其速度 v 为虚数, 运动无法进行。从 (17.94) 式可看出, 如果由 P 点的初始位置和速度确定的积分常数 C 为负值, 则上式恒成立, P 点的运动范围没有限制, 可以在整个三维空间内运动。如果定出的 $C > 0$, 则按 (17.94) 式, P 点的坐标必须满足不等式

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} \geq C$$

因此, 小天体可能运动区域的临界判断条件为

$$2Q = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C \quad (17.95)$$

此为一个空间曲面方程, 代入雅可比积分 (17.93) 式就得 $v^2 = 0$, 故在这个曲面上的任一点处, 都有 $v = 0$, 称曲面 (17.95) 式为零速度面。它是希耳在研究月球运动时首先提出的, 在很多书上又称零速度面为希尔曲面。在 (17.95) 式中, $r_1, r_2, \mu, 1-\mu$ 都是正量。所以 $x^2 + y^2 \leq C$, 当 $|z|$ 充分大时, r_1 和 r_2 都趋于无穷。(17.95) 式的后两项都趋于零。此时就有 $x^2 + y^2 = C$, 此为以坐标原点为中心, $\sqrt{C}$ 为半径的圆柱面, 它可以视为零速度面的渐近曲面。

由解析几何的知识, 零速度面 $2\Omega = C$ 上的任意一点的法线方向的方向余弦与 $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ 成比例。而当此曲面上的某些点的坐标满足关系式 $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$ 时, 相应点的法线方向不确定, 这种点称为零速度面的奇点。回顾上节所讲述的称动解定义可知, 五个称动解都为满足条件的奇点。亦即, 五个称动解都位于零速度面上。除了这五个点以外, 零速度面上的所有其他点都有确定的法线方向。

对于不同的 C 值, (17.95) 式代表不同的曲面, 它是一个零速度曲面族。由 (17.95) 式可知, 零速度曲面族相对于 xy 平面对称的, 且五个平动解都在 xy 平面上, 为讨论方便起见, 可以利用零速度面在 xy 平面上的交线来代替零速度面, 此交线称为零速度线, 其方程式为

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}} = C. \quad (17.96)$$

上式是一个平面曲线方程, 对于不同的 C 值, 上式构成一组零速度曲线族。(17.96) 式表明, 此曲线族对称于 x 轴, 且因左端各项皆为正, 则 $C > 0$ 。由此可以根据 C 的变化来讨论零速度线形状的变化, 进而得到小天体 P 可能运动的区域。

当 C 值充分大时, 按 (17.96) 式有三种可能:

(1) $x^2 + y^2$ 很大, 其他两项很小, 此时 $x^2 + y^2 \simeq C$ 表示一条半径相当大且接近于圆的闭曲线;

(2) $r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$ 很小, 使得 (17.96) 式左端第二项很大, 其余两项则很小, 此时, (17.96) 式近似表为

$$(x+\mu)^2 + y^2 \simeq \left(\frac{2(1-\mu)}{C} \right)^2$$

此为一个以 $x = -\mu$ 即 P_1 点为中心, 半径很小的近圆形闭曲线;

(3) $r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}$ 很小, 即(17.96)式左端第三项很大, 此时(17.96)式近似表为

$$(x-1+\mu)^2 + y^2 \approx \left(\frac{2\mu}{C}\right)^2$$

此为一个以 $x = 1 - \mu$, 即 P_2 点为中心, 半径很小的近圆形闭曲线。

由此可见, 当 C 值非常大时, (17.96)式表示的零速度线由三个彼此孤立的闭曲线组成, 根据 $v^2 \geq 0$ 的限制条件, 小天体 P 的可能运动范围是大闭曲线的外部 and 两个小闭曲线的内部(见图 17.9(a))。

C 值逐渐减小时, 外部的大闭曲线逐渐变小, 里面的两个闭曲线逐渐增大, 当 C 值减小至某一 C_1 值时, 里面两个闭曲线扩大, 直至交于一点, 此点为零速度面的自交点, 在这一点上零速度面的法线方向不定, 是一个奇点, 此即为拉格朗日秤动点 L_1 。同时, 大闭曲线缩小但并不与两小闭曲线相交(见图 17.9(b))。

当 C 值再减小时, 在 L_1 点处出现了一条通道, 里面的两条闭曲线相连通呈哑铃状。如果在初始时刻 P_1 位于有限体 P_1 附近, 则在此时, P 可以从通道穿过而进入有限体 P_2 附近, 这就形成了物质的流通(见图 17.9(c))。

当 C 值继续减小至某一值 C_2 时, 内外两条封闭曲线在拉格朗日秤动点 L_2 处相交, L_2 也是零速度线的自交点。 C 值再减小时, 曲线在 L_2 点处分开, 形成一个缺口, 内外两条闭曲线连成一条封闭曲线(见图 17.9(d)), 此时小天体 P 可以由内部从此缺口处运动到大闭曲线的外部, 两个可运动区域相互连通。

C 值再减小至 C_3 时, 闭曲线又收缩至另一端拉格朗日点 L_3 处相交, 形成以 x 轴为对称轴的两条蝌蚪状闭曲线, L_3 也为自交

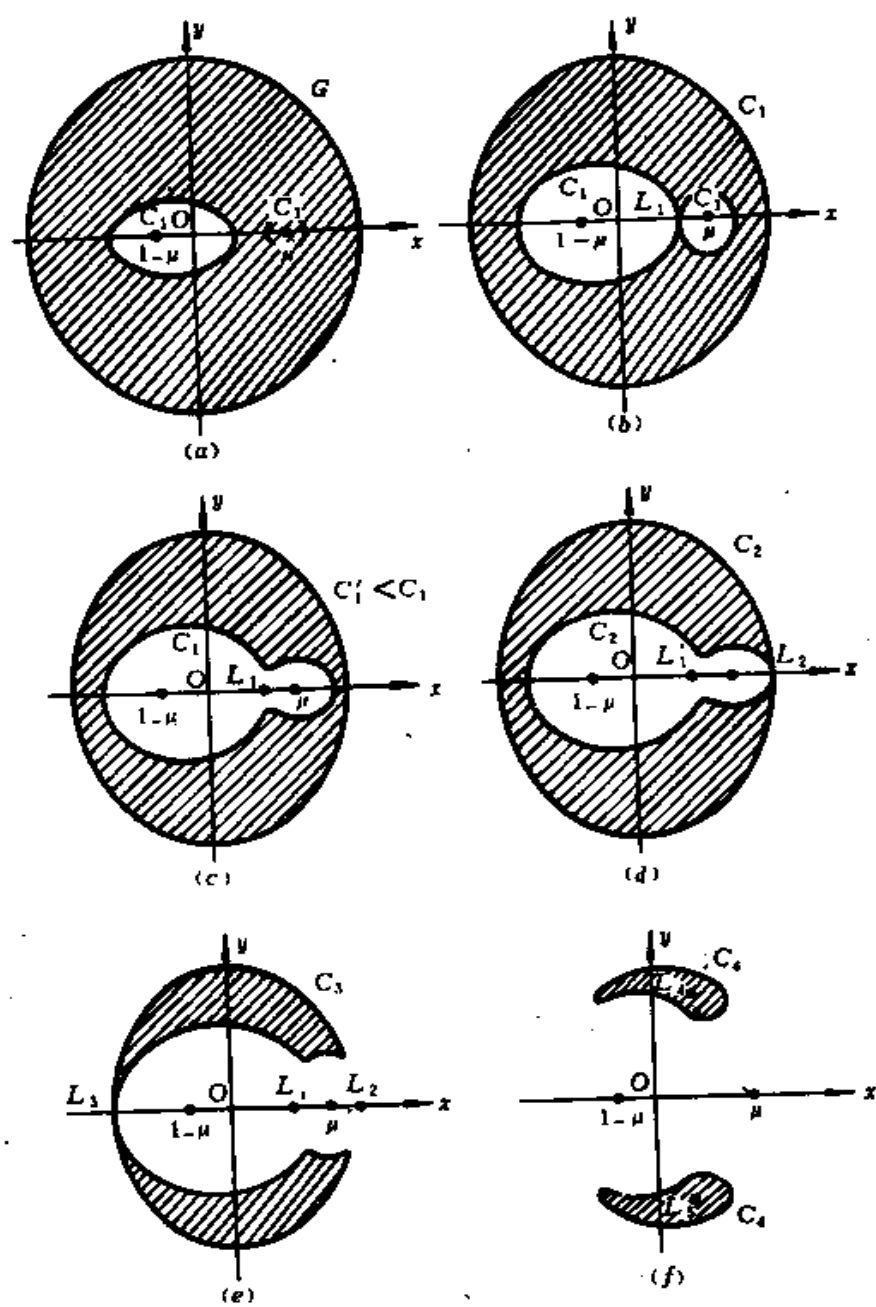


图 17.9 零速度面

点(见图 17.9(e))。C 值再继续缩小, 两条蝌蚪曲线逐渐分开, 在 L_3 点处又出现一个缺口, 形成一条通道, 随着 C 值的不断减小, 两条闭曲线分开成对称于 x 轴的曲线并变小。此时小天体除两条闭曲线内部不能穿越运动外, 其余空间都可以运动, 当 C 值减小到 C_4 值时, 两条闭曲线收缩为两个对称于 x 轴的点 L_4 和 L_5 , 它们也是零速度线的自交点亦即等边三角形解。当 $C < C_4$ 时, 零速度线不再存在, 小天体 P 的运动将不受任何条件限制, 即整个三维空间的任一位置, 小天体 P 都能到达(见图 17.9(f))。

零速度面在限制性三体问题的定性研究和分析理论中都占有很重要的地位。近年来的研究表明, 在椭圆型限制性三体问题及一般三体问题中也存在类似的希耳曲面。

§ 17.9 限制性三体问题的应用

限制性三体问题是三体问题中讨论得最多, 解决得比较好的问题。由于它与许多实际天体情况比较接近, 因此有较广泛的实用价值, 本节主要介绍二种应用。

一、用于月球运动的讨论

在日、地、月组成的三体系统中, 三体的质量比为 $m_H : m_E : m_M \approx 300,000 : 1 : 0.01$, 三体之间的距离之比为 $r_{H,E} : r_{H,M} : r_{E,M} \approx 390 : 390 : 1$ 。根据这些比例可以计算出月球对太阳的吸引力是地球对太阳的吸引力的 10^{-2} 倍, 月球对地球的吸引力是太阳对地球的吸引力的 5×10^{-3} 倍。因此, 月球对日、地系统的影响与支配日、地二体系统运动的引力相比是一小量。在近似的情况下可以忽略月球对日、地的吸引力。同时, 由于地球轨道偏心率只有 0.017, 可以近似看作圆轨道, 月球轨道和黄道的交角 $\approx 5^\circ$, 也可以近似

地认为月球是在黄道面上运动。由此可见，在讨论月球运动时可将其近似处理为平面圆型限制性三体问题，以此作为月球运动理论的基础，而后考虑那些被忽略的因素，将它们作为摄动项处理。

二、用于月球火箭运动的研究

这时三体为地球、月球和月球火箭，月球火箭的质量与地球和月球的质量相比是十分微小的，另外，月球轨道的偏心率为0.055，月、地轨道面的夹角为 5.15° 。在发射火箭时，为了节省能量，往往使月球火箭始终保持在地月平面内运动，这样，月球火箭的运动完全可以用平面圆型限制性三体问题来作为近似模型。

除上述应用外，在讨论太阳、木星、小行星；太阳、小行星、行星际火箭以及太阳、木星、木星卫星等组成的三体问题时也常用限制性三体问题作为近似模型。

第十八章 摄动问题

在前两章的基础上, 本章主要介绍天体力学中的一个重要组成部分——摄动理论的基本知识, 包括摄动运动方程的建立, 解法, 解的结果及在实际问题中的应用。

§ 18.1 摄动理论简介

一、摄动的定义

在上一章 (§ 17.4) 中, 已经讨论了用直角坐标表示的 N 体问题摄动运动方程。为了更广泛地研究摄动问题, 现在从普遍意义上来描述摄动的基本概念和定义。

设质量为 m 的质点 P 相对于质量为 M 的中心体 S 作二体运动, 在相对直角坐标系 $S-xyz$ 中, P 的运动方程可写为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu}{r^3} x, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu}{r^3} y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{r^3} z. \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mu = G(M + m)$ 。

如果除 S 的引力外, P 还受其他外力作用 (包括坐标系 $S-xyz$ 受外力影响的变化), 外力的总合力为 $F(F_x, F_y, F_z)$, 其大小记为 F , 且 $F \ll$ 中心引力。此时, P 点的运动方程可写为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu}{r^3}x + \frac{F_x}{m}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu}{r^3}y + \frac{F_y}{m}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{r^3}z + \frac{F_z}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

一般将 F 称为摄动力, $\frac{F_x}{m}$, $\frac{F_y}{m}$, $\frac{F_z}{m}$ 称为 P 受 F 作用而产生的摄动加速度三分量。

当 $F=0$ 时, (18.2) 式就是 (18.1) 式, 即为二体问题, 从第十六章的结果可知, 直角坐标、速度与轨道根数之间有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} x &= (r \cos f) l_1 + (r \sin f) l_2, \\ y &= (r \cos f) m_1 + (r \sin f) m_2, \\ z &= (r \cos f) n_1 + (r \sin f) n_2. \end{aligned} \right\} \quad (18.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \left(-\frac{a^2 n}{r} \sin E \right) l_1 + \left(\frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} \cos E \right) l_2, \\ \dot{y} &= \left(-\frac{a^2 n}{r} \sin E \right) m_1 + \left(\frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} \cos E \right) m_2, \\ \dot{z} &= \left(-\frac{a^2 n}{r} \sin E \right) n_1 + \left(\frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} \cos E \right) n_2. \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E), \\ r \cos f &= a(\cos E - e), \\ r \sin f &= a \sqrt{1-e^2} \sin E, \\ E - e \sin E &= M = n(t - \tau), \\ n^2 a^3 &= \mu = G(M + m). \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

其中 l_1 , m_1 , n_1 , l_2 , m_2 , n_2 都是轨道根数 i , Ω , ω 的函数。若给定某一时刻 P 的坐标和速度就可利用 (18.3) 式至 (18.5) 式求得 P 点的轨道根数, 反之亦然。

当 $F \neq 0$ 时, P 点的坐标和速度只有通过解方程组 (18.2) 式

才能得到, 其结果与二体问题的解有所差别。设按(18.2)式解出的结果为

$$x' = x + \delta x, \quad y' = y + \delta y, \quad z' = z + \delta z.$$

$$\dot{x}' = \dot{x} + \delta \dot{x}, \quad \dot{y}' = \dot{y} + \delta \dot{y}, \quad \dot{z}' = \dot{z} + \delta \dot{z}.$$

这里 (x', y', z') , $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$ 与二体问题的坐标 (x, y, z) 和速度 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 之间的差别 $(\delta x, \delta y, \delta z)$, $(\delta \dot{x}, \delta \dot{y}, \delta \dot{z})$ 是由于摄动力而引起的增量, 称为坐标摄动和速度摄动。 (x', y', z') 和 $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$ 分别叫做受摄坐标和受摄速度。由于摄动力引起坐标和速度的变化, 又由(18.3), (18.4)和(18.5)而引起轨道根数的变化, 受摄轨道根数可记为

$$a' = a + \delta a, \quad e' = e + \delta e, \quad i' = i + \delta i,$$

$$\Omega' = \Omega + \delta \Omega, \quad \omega' = \omega + \delta \omega, \quad M_0' = M_0 + \delta M_0.$$

同样, $(\delta a, \delta e, \delta i, \delta \Omega, \delta \omega, \delta M_0)$ 可称为轨道根数摄动, 它们都是时间 t 的函数。通常把某一时刻 t 的受摄轨道根数叫做瞬时根数, 它们所对应的轨道叫做瞬时轨道。

二、摄动理论的基本内容和方法

在有摄情况下, 运动方程的形式和求解过程都较二体问题复杂得多。研究和确定各类摄动的变化规律的理论和方法称为摄动理论。

解决摄动问题, 在数学上可以通过分析和数值两种定量方法来考虑。在摄动理论中把分析方法称为普遍摄动法, 数值方法称为特殊摄动法。由于采取的变量不同, 解决摄动问题的方法又常分为坐标摄动法和根数摄动法。

坐标摄动法是研究天体在真实轨道上的坐标和在中间轨道(可以是二体轨道, 也可以是其他近似轨道)上的坐标之差。这个差值称为坐标摄动, 按所取坐标系的不同, 坐标摄动又分为直角

坐标摄动，球坐标摄动和其他坐标摄动。

根数摄动法是以轨道根数作为基本变量的摄动方法。根数摄动法最早是欧拉在十八世纪中期研究木星与土星的相互摄动时提出的，后来由拉格朗日加以改进。他根据常数变易法，引进拉格朗日括号，严格地导出了描述椭圆运动轨道根数变化的摄动运动方程——拉格朗日行星运动方程，而后用分析或数值方法求解。这是一个应用最广的方法，下面几节将具体介绍。

摄动理论不仅有丰富的理论内容，还有较高的实用价值。因为影响天体运动的摄动因素很多，只有准确把握和分析各种摄动的特点并对其进行不同的计算方法，才能准确地计算天体的运动轨道。反之，通过精密的观测和准确把握天体的运动规律，可以反测天体的质量，力学扁率，弹性模型，大气密度和各种引力场参数等等。

§ 18.2 拉格朗日行星运动方程

在受摄情况下，天体运动轨道根数的变化要比它的直角坐标的变化缓慢得多。因此，在实际处理时，采用轨道根数作为变量既有直观的轨道意义又便于计算。下面就来推出以轨道根数为变量的摄动运动方程——拉格朗日行星运动方程。

一、常数变易法

设质量为 m 的行星在运动过程中所受的摄动力为有势力，记为 $F=(F_x, F_y, F_z)=(mX, mY, mZ)$ ， X, Y, Z 为 F 所产生的摄动加速度的三个分量。有势力 F 必然存在力函数 $mR=mR(x, y, z)$ ，且满足关系式

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ Y &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ Z &= \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

此时, 行星的摄动运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu}{r^3} x + \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu}{r^3} y + \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{r^3} z + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

当 $R=0$ 时, 上式即为无摄运动方程, 设 (x_0, y_0, z_0) , $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ 和 $(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0)$ 分别为无摄运动时天体的坐标、速度和加速度三分量。引入函数 H_0 , 使得

$$H_0 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r} \quad (18.8)$$

则可将无摄运动方程写成一阶方程组的形式

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \ddot{y}_0 = -\frac{\partial H_0}{\partial y}, \quad \ddot{z}_0 = -\frac{\partial H_0}{\partial z}, \\ \dot{x}_0 &= \frac{\partial H_0}{\partial \dot{x}}, \quad \dot{y}_0 = \frac{\partial H_0}{\partial \dot{y}}, \quad \dot{z}_0 = \frac{\partial H_0}{\partial \dot{z}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

(18.9) 式即为二体问题的运动方程组, 在第十六章中已全部求出它的完全解, 如(18.3)式, (18.4)式和(18.5)式所列, 这些解可表为时间 t 和六个相互独立的轨道根数的函数, 将无摄运动的坐标和速度用矢量形式表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(a, e, i, \omega, \Omega, M_0, t), \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}(a, e, i, \omega, \Omega, M_0, t). \end{aligned} \right\} \quad (18.10)$$

当 $R \neq 0$ 时, 令函数

$$H = H_0 - R = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r} - R \quad (18.11)$$

以此代入(18.7)式, 并将其写成一阶方程组的形式得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \ddot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, & \ddot{z} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, & \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

比较(18.11)式, (18.12)式与(18.8)式、(18.9)式可知, H 与 H_0 的差别仅在于由摄动而产生的摄动函数, (18.9)式与(18.12)式形式上完全相同。由此可以假设在 $R \neq 0$ 时, 方程组(18.12)式的解也具有(18.10)式给出的形式, 但是相应的轨道根数不再是常数而是时间 t 的函数, 它们的变化是由于摄动存在而引起的。如果能找出这些轨道根数随摄动函数 R 变化的微分方程, 解出这些方程, 就可得出轨道根数的变化规律, 以此代入(18.10)式所表示的形式解, 最终就可得到在受摄情况下摄动运动方程的解。这样一种形式解的变换原理称为常数变易法, 这是摄动理论中常用的一种原则性解法。

二、拉格朗日行星运动方程的推导

根据上述常数变易法原理, 在有摄情况下, 行星的坐标和速度仍可表为(18.10)式的形式, 只是轨道根数不为常数, 而是 t 的函数。为简便起见, 令 $a_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 代替 $a, e, i, \omega, \Omega, M_0$ 六个轨道根数, 将(18.10)式两边对时间 t 求导数并写成分量的形式, 则

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial a_i} \dot{a}_i, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial y}{\partial a_i} \dot{a}_i, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial z}{\partial a_i} \dot{a}_i, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_i} \dot{a}_i, \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{y}}{\partial a_i} \dot{a}_i, \\ \frac{d\dot{z}}{dt} &= \frac{\partial \dot{z}}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{z}}{\partial a_i} \dot{a}_i. \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

其中 $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial \dot{x}}{t}$ 等为求偏导数过程中将轨道根数视为与 t 无关的常数的一种运算。当 $R=0$ 时, 与(18.9)式相对应有

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial \dot{z}} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial y}, \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

将上式与(18.13)式一起代入(18.12)式, 可得出在 $R \neq 0$ 的情况下的关系式

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial a_i} \dot{a}_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial y}{\partial a_i} \dot{a}_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial z}{\partial a_i} \dot{a}_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_i} \dot{a}_i &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{y}}{\partial a_i} \dot{a}_i &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{z}}{\partial a_i} \dot{a}_i &= \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

将(18.15)式中三个式子分别乘以 $\frac{\partial \dot{x}}{\partial a_1}$, $\frac{\partial \dot{y}}{\partial a_1}$, $\frac{\partial \dot{z}}{\partial a_1}$ 后, 减去(18.16)式中三个式子依次乘以 $\frac{\partial x}{\partial a_1}$, $\frac{\partial y}{\partial a_1}$, $\frac{\partial z}{\partial a_1}$ 得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial a_i} \frac{\partial x}{\partial a_1} - \frac{\partial x}{\partial a_i} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_1} \right) \dot{a}_i &= \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_1} \\ \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial a_i} \frac{\partial y}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_i} \frac{\partial \dot{y}}{\partial a_1} \right) \dot{a}_i &= \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_1} \\ \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial a_i} \frac{\partial z}{\partial a_1} - \frac{\partial z}{\partial a_i} \frac{\partial \dot{z}}{\partial a_1} \right) \dot{a}_i &= \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a_1} \end{aligned} \right\}$$

以上三式相加得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^6 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial a_1} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_i} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_1} \frac{\partial x}{\partial a_i} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial \dot{y}}{\partial a_i} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial a_1} \frac{\partial y}{\partial a_i} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial z}{\partial a_1} \frac{\partial \dot{z}}{\partial a_i} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial a_1} \frac{\partial z}{\partial a_i} \right) \right] \dot{a}_i \\ &= \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_1} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_1} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a_1} \end{aligned} \quad (18.17)$$

现在引入算符

$$\begin{aligned} [a_r, a_s] &= \left(\frac{\partial x}{\partial a_r} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_s} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_r} \frac{\partial x}{\partial a_s} \right) \\ & \quad + \left(\frac{\partial y}{\partial a_r} \frac{\partial \dot{y}}{\partial a_s} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial a_r} \frac{\partial y}{\partial a_s} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial a_r} \frac{\partial \dot{z}}{\partial a_s} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial a_r} \frac{\partial z}{\partial a_s} \right) \\ &= \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial x}{\partial a_r} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_s} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial a_r} \frac{\partial x}{\partial a_s} \right) \end{aligned}$$

$[a_r, a_s]$ 称为拉格朗日括号，它常用来表示某些变量之间的变换和运算关系。又因为摄动函数 R 仅为坐标的函数，因此

$$\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_1} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_1} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a_1} = \frac{\partial R}{\partial a_1}$$

利用上式和拉格朗日括号的定义，可将(18.17)式简化为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 [a_1, a_i] \dot{a}_i &= \frac{\partial R}{\partial a_1}, \\ \sum_{i=1}^6 [a_2, a_i] \dot{a}_i &= \frac{\partial R}{\partial a_2}, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^6 [a_6, a_i] \dot{a}_i &= \frac{\partial R}{\partial a_6}. \end{aligned} \right\} \quad (18.18)$$

同理可得

(18.18)式为 $\dot{a}_i$ 的线性微分方程组, 只要计算出所有的拉格朗日括号, 就可以得到 $\dot{a}_i$ 所满足的方程。在(18.18)式中共有 36 个拉格朗日括号, 根据定义, 拉格朗日括号应具有下列性质:

$$\left. \begin{aligned} [a_r, a_r] &= 0, \\ [a_s, a_r] &= -[a_r, a_s], \\ \frac{\partial}{\partial t}[a_r, a_s] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.19)$$

由此, 只需求出 15 个拉格朗日括号。

利用坐标、速度与轨道根数之间的关系式(18.3), (18.4)和(18.5), 可以逐个求出所需要的拉格朗日括号①, 它们的结果是

$$\left. \begin{aligned} [a, M_0] &= -\frac{na}{2}, \\ [e, M_0] &= -\frac{na^2 e}{1-e^2}, \\ [\omega, a] &= \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{2}, \\ [\Omega, a] &= \frac{na \sqrt{1-e^2}}{2} \cos i, \\ [\Omega, i] &= -na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i, \\ [a, e] &= [a, i] = [e, \omega] = [M_0, \omega] \\ &= [i, e] = [i, M_0] = [i, \omega] = [\Omega, e] \\ &= [\Omega, M_0] = [\Omega, \omega] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.20)$$

将(18.20)式代入方程组(18.18)式, 经整理后可得各轨道根数所满足的微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \\ \dot{e} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1+e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \end{aligned} \right\}$$

① 可参阅赵进义编著:《天体力学》,上海科技出版社(1983)。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{di}{dt} &= \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \dot{M}_0 &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \dot{\Omega} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i}.
 \end{aligned} \right\} \quad (18.21)$$

(18.21) 式是用行星轨道根数作为基本变量的摄动运动方程组，它是首先由拉格朗日在研究行星运动时推出的，在天体力学中称为拉格朗日行星运动方程。

上面所采用的是最常用的一组轨道根数形式，在许多具体问题中，可针对不同的要求选用不同的轨道根数组合形式，运用变量变换原理可以从 (18.21) 式推出相应的摄动运动方程。其他比较常见的轨道根数组合有：

1. 以 $a, e, i, \varepsilon_0, \bar{\omega}, \Omega$ 为根数 这组根数是以 ε_0 和 $\bar{\omega}$ 来代替 M_0 和 ω ，它们之间的关系是

$$\varepsilon_0 = M_0 + \omega + \Omega,$$

$$\bar{\omega} = \omega + \Omega.$$

这样可以将三个角变量 $\varepsilon_0, \bar{\omega}, \Omega$ 都统一到以某一历元时刻的春分点为起算点，避免了 ω, Ω, M_0 的起算点各不相同的麻烦。这组根数所满足的方程形式为

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}, \\
 \dot{e} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} + \frac{(1-e^2) - \sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0},
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
 &\quad - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \right), \\
 \dot{\varepsilon}_0 &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\
 &\quad - \frac{(1-e^2) - \sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \dot{\tilde{\omega}} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \dot{\Omega} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i}.
 \end{aligned} \right\} \quad (18.22)$$

2. 消除小偏心率困难的轨道根数 $a, i, h, k, \varepsilon_0, \Omega$ 在 (18.21) 和 (18.22) 两式中都含有以偏心率 e 作为分母的项。在太阳系中行星或小行星的偏心率都比较小，这样就可能使这些项的系数很大，以致解微分方程遇到困难，为此引入根数 h, k 来代替 $e, \tilde{\omega}$ ，令

$$h = e \sin \tilde{\omega}, \quad k = e \cos \tilde{\omega}. \quad (18.23)$$

经变换后 h, k 所满足的方程为

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{h} &= \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} - \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \\
 &\quad \times \frac{h}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} + \frac{k \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \dot{k} &= -\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \\
 &\quad \times \frac{k}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial i}.
 \end{aligned} \right\} \quad (18.24)$$

在上式中已消去了小偏心率 e 作为分母的困难。

3. 消除小倾角困难的轨道根数 $a, e, \omega, \varepsilon_0, p, q$ 与上述相类似, 在(18.22)式的 i 和 Ω 方程中含有 $\sin i$ 作为分母, 大多数的行星和小行星 i 都比较小, 这就造成小倾角作分母的困难, 为解决这个问题, 引入根数 p, q , 使得

$$p = \sin i \sin \Omega, \quad q = \sin i \cos \Omega. \quad (18.25)$$

变换后可得相应的方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q} \\ &\quad - \frac{p\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-p^2-q^2})} \left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \right), \\ \dot{q} &= -\frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p} \\ &\quad - \frac{q\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-p^2-q^2})} \left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18.26)$$

上式中已消除了含 $\sin i$ 作为分母的项。

§ 18.3 摄动力三分量表示的摄动运动方程

在许多实际问题中, 行星所受的摄动力不完全是势, 如果摄动力是非势的耗散力, 则就不存在摄动函数, 拉格朗日行星运动方程就不适用, 而必须直接用摄动力来表示摄动运动方程。

图 18.1 表示日心天球 O - XYZ 系为日心黄道直角坐标系, 大圆 XNY 为黄道, X 轴指向春分点, N 为被摄行星的轨道面与黄道面的升交点。

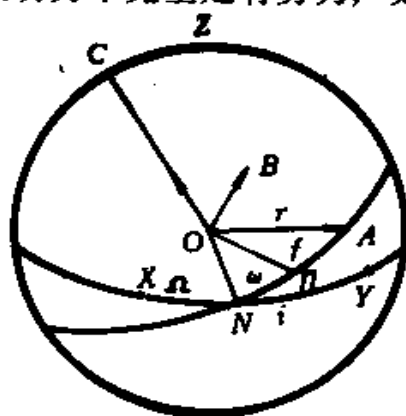


图 18.1 摄动力的三分量表示

如果行星所受的摄动力 F 产生的加速度在 $O-XYZ$ 系中的分量为 X, Y, Z , 则行星的摄动运动方程可写为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3} + X, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3} + Y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3} + Z. \end{aligned} \right\} \quad (18.27)$$

由于行星是沿椭圆轨道运动, 要得到加速度分量与轨道根数之间的关系是比较困难的, 因而(18.27)式的求解相当复杂。为了便于求解, 往往将摄动加速度分解为与行星运动轨道有关的三个分量。如图 18.1 所示, 建立 $O-ABC$ 坐标系, AB 平面就是行星轨道面。 OA 轴即为某一 t 时刻行星的向径方向, OB 轴在 AB 平面上与向径相垂直且以沿着行星运动正方向为正, OC 轴为行星轨道面法线方向, 与 OA, OB 成右手正交系。设 S, T, W 为摄动加速度在 $O-ABC$ 系中的三分量, 这样就将摄动加速度与轨道运动相联系起来。

按轨道根数的定义, 图 18.1 中, $\widehat{XN} = \Omega, \widehat{NI} = \omega, \angle INY = i$ (I 为轨道近日点在天球上的投影), $\widehat{IA} = f, \widehat{NA} = u = \omega + f$ 。利用旋转矩阵法, $O-XYZ$ 系只需经过三次旋转就可与 $O-ABC$ 系重合。第一次是绕 Z 轴逆时针转 Ω 角; 第二次绕 ON 轴逆时针转 i 角; 第三次是绕 C 轴逆时针旋转 $u = \omega + f$ 角。最终 (X, Y, Z) 与 (S, T, W) 之间的关系可以用旋转矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = R(Z, u) \cdot R(X, i) \cdot R(Z, \Omega) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

写成分量的形式为

$$\left. \begin{aligned} S &= l_1 X + m_1 Y + n_1 Z, \\ T &= l_2 X + m_2 Y + n_2 Z, \\ W &= l_3 X + m_3 Y + n_3 Z. \end{aligned} \right\} \quad (18.28)$$

反之, 亦可得

$$\left. \begin{aligned} X &= l_1 S + l_2 T + l_3 W, \\ Y &= m_1 S + m_2 T + m_3 W, \\ Z &= n_1 S + n_2 T + n_3 W. \end{aligned} \right\} \quad (18.29)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i, \\ m_1 &= \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i, \\ n_1 &= \sin u \sin i, \\ l_2 &= -\cos \Omega \sin u - \sin \Omega \cos u \cos i, \\ m_2 &= -\sin \Omega \sin u + \cos \Omega \cos u \cos i, \\ n_2 &= \cos u \sin i, \\ l_3 &= \sin \Omega \sin i, \\ m_3 &= -\cos \Omega \sin i, \\ n_3 &= \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (18.30)$$

有两种推导方法可以得出 S, T, W 表示的摄动运动方程:

1. 摄动函数转换法 这是较常见的一种方法, 其主要思路是, 假设摄动力存在摄动函数 R , 满足关系 $X = \frac{\partial R}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial R}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial R}{\partial z}$, 而后利用(18.28)式、(18.30)式(X, Y, Z)与(S, T, W)之间的关系, 以及(18.3)–(18.5)三式内给出的直角坐标与轨道根数之间的关系将拉格朗日行星运动方程转换为以 S, T, W 三分量表示的摄动运动方程。

设 $R(x, y, z)$ 为摄动力 F 所产生的摄动函数, σ 为任一轨道根数, 则

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \sigma}. \quad (18.31)$$

根据(18.3)–(18.5)可以得出 $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial \sigma}$, 又利用(18.28)–(18.30)可以将 $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ 转换为 S , T , W , 因此(18.31)式可以转化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \sigma} = & S \frac{\partial r}{\partial \sigma} + rT \left(n_3 \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \\ & + rW \left(-n_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \sin u \frac{\partial i}{\partial \sigma} \right). \end{aligned} \quad (18.32)$$

如果不考虑平近点角 M 中隐含的 a , 利用(18.5)式可得

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma} = \frac{r}{a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} - a \cos f \frac{\partial e}{\partial \sigma} + \frac{a^2 e \sin E}{r} \frac{\partial M_0}{\partial \sigma}. \quad (18.33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \sin f \frac{\partial e}{\partial \sigma} + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} \frac{\partial M_0}{\partial \sigma}. \quad (18.34)$$

将(18.33)式和(18.34)式代入(18.32)式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \sigma} = & \left[\frac{r}{a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} - a \cos f \frac{\partial e}{\partial \sigma} + \frac{a^2 e \sin E}{r} \frac{\partial M_0}{\partial \sigma} \right] \cdot S \\ & + \left[\cos i \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \sin f \frac{\partial e}{\partial \sigma} \right. \\ & \left. + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} \frac{\partial M_0}{\partial \sigma} \right] \cdot rT \\ & + \left[-\cos u \sin i \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \sin u \frac{\partial i}{\partial \sigma} \right] \cdot rW, \end{aligned} \quad (18.35)$$

将 σ 换以各个轨道根数代入上式可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{r}{a} \cdot S, \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= -a \cos f \cdot S + r \left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \sin f \cdot T, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial i} &= r \sin u \cdot W, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= r \cos i \cdot T - r \cos u \sin i \cdot W, \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} &= r T, \\ \frac{\partial R}{\partial M_0} &= \frac{a^2 e \sin E}{r} S + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r} \cdot T. \end{aligned} \right\} \quad (18.36)$$

再以 (18.36) 式代入拉格朗日行星运动方程即可得以摄动力三分量 S, T, W 表示的方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[e \sin f \cdot S + \frac{p}{r} \cdot T \right], \\ \dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\sin f \cdot S + (\cos f + \cos E) \cdot T], \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W, \\ \dot{\Omega} &= \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W, \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-\cos f \cdot S + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \cdot T \right] \\ &\quad - \frac{r \operatorname{ctg} i \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W, \\ \dot{M}_0 &= \left(\frac{1-e^2}{nae} \cos f - \frac{2r}{na^2} \right) \cdot S \\ &\quad - \frac{1-e^2}{nae} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \cdot T. \end{aligned} \right\} \quad (18.37)$$

(18.37) 式又称为牛顿方程。

2. 直接推导法 这种方法不必假设存在摄动函数, 而是直接从 (18.27) 式出发, 利用动量矩积分和能量积分等关系推出以轨道根数为变量, 摄动力三分量表示的摄动运动方程。在此, 仅以 $\dot{a}$ 的方程推导为例来说明这种方法的原理。

将摄动运动方程(18.27)式写成矢量的形式为

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{F}. \quad (18.38)$$

将二体问题的活力公式写为

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

在受摄情况下, 二体问题积分中的轨道根数都要视为时间 t 的函数, 因而上式两边对 t 微商得

$$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{2\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{a^2} \dot{a}.$$

将(18.38)式代入上式可得

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}.$$

设 $\mathbf{F}$ 的分量为 (S, T, W) , 而 $\dot{\mathbf{r}}$ 在 $O-ABC$ 系中的分量为 $(\dot{r}, r\dot{f}, 0)$, 故上式成为

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} (\dot{r}S + r\dot{f}T).$$

利用二体问题的积分关系可得

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f, \quad r\dot{f} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{p}{r} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r},$$

$$\mu = n^2 a^3.$$

代入 $\dot{a}$ 的方程, 即有

$$\dot{a} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left(e \sin f \cdot S + \frac{p}{r} T \right)$$

这就是(18.37)式中的第一式。对于其余的根数, 可根据类似的原理推出, 这里不一一介绍。

为了讨论方便起见, 有时还将摄动力 $\mathbf{F}$ 产生的加速度分解为 U, N, W 三个分量。其中, U 是任一 t 时刻行星运动速度的正方向, 即轨道面的切线方向; N 是垂直于 U 在轨道平面内的轨

道内法线方向; W 仍为轨道平面的法线方向。

如图 18.2 所示, 设 θ 为 t 时刻行星速度正方向与向径方向之间的交角, 则有转换关系

$$\left. \begin{aligned} U &= S \cdot \cos \theta + T \cdot \sin \theta, \\ N &= -S \cdot \sin \theta + T \cdot \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (18.39)$$

反之亦得

$$\left. \begin{aligned} S &= U \cdot \cos \theta - N \cdot \sin \theta, \\ T &= U \cdot \sin \theta + N \cdot \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (18.40)$$

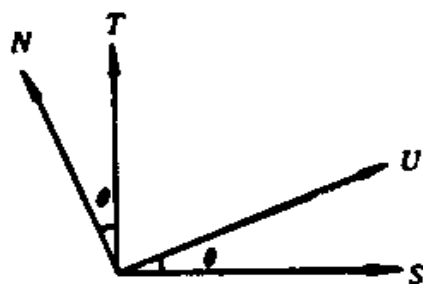


图 18.2 (S, T, W) 与 (U, N, W) 之间的转换

从图 18.2 可知, 设速度在径向和横向的分量分别为 $\dot{r}$, $r\dot{f}$, 则有

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r \dot{f}}{\dot{r}}.$$

利用二体问题的积分关系可推得

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1 + e \cos f}{e \sin f}.$$

因此有

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e \sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}}, \\ \sin \theta &= \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.41)$$

代入(18.40)式可得 (S, T, W) 与 (U, N, W) 之间的关系

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{e \sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} U - \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} N, \\ T &= \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} U + \frac{e \sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} N, \\ W &= W. \end{aligned} \right\} \quad (18.42)$$

将(18.42)式代入牛顿方程(18.37)式就可得到以摄动加速度三分量 U, N, W 表示的摄动运动方程。

§ 18.4 瞬时椭圆，几种常见的摄动

一、瞬时椭圆

前面几节已利用常数变易法原理推出了拉格朗日行星运动方程和用摄动力三分量表示的牛顿方程，如果将这些方程解出得到各轨道根数随时间的变化规律，再将这些结果代入无摄运动的解就可得行星在真实轨道上的运动规律。摄动运动的这种理论推导也可以利用瞬时椭圆的概念来作几何的直观的解释。

由于在受摄情况下，轨道根数是时间的函数，给定一个时刻 t ，就可以得出 t 时刻相应的轨道根数，也就是确定了一条圆锥曲线轨道，这种轨道称为瞬时轨道，对于作椭圆运动的天体，瞬时轨道是椭圆，叫做瞬时椭圆。因为将轨道根数视为变量时，无摄运动的积分在受摄时仍适用，将 t 时刻的轨道根数代入无摄运动所确定的坐标和速度与根数的函数关系

$$r = r(a, e, i, \omega, \Omega, M_0, t),$$

$$\dot{r} = \dot{r}(a, e, i, \omega, \Omega, M_0, t).$$

中去，就可确定 t 时刻天体在瞬时椭圆上的坐标和速度，这也是 t 时刻天体在真实轨道上的受摄坐标和速度。这就说明，在任一时刻 t ，天体在真实轨道上所具有的坐标和速度值与它在此时刻

相应的瞬时轨道上的坐标和速度值完全相同，因此，在 t 时刻瞬时轨道应与真实轨道相切，切点就是此时刻天体所在的位置。

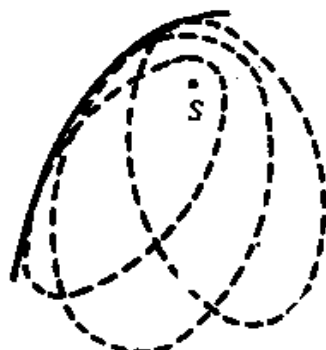


图 18.3 瞬时椭圆

如图 18.3 所示，在瞬时椭圆与真实轨道的相切点，瞬时坐标 瞬时速度与天体的真实坐标和真实速度相同但瞬时

加速度与真实加速度不相同，前者是椭圆运动加速度，后者则是天体的真实运动加速度。两者之差就是摄动力引起的摄动加速度。这种摄动加速度的作用，使得天体在 $t + \Delta t$ 时刻将离开 t 时刻的瞬时椭圆，而走上此时此刻的瞬时椭圆，依此类推。这就直观地表明，瞬时椭圆是以时间 t 为参数的轨道曲线族，而此曲线族中的每一条轨道都与真实轨道相切。从微分几何的观点来说，天体的真实轨道是瞬时椭圆轨道族的包络线。

瞬时椭圆的定义也表示，一旦摄动作用消失，天体将沿着此时此刻的瞬时椭圆作二体运动。因此，瞬时椭圆概念的引进保证了在二体问题中由坐标和速度分量组合成的一切关系式，二体问题的积分，各近点角之间的关系以及轨道根数的偏微商关系式等等在受摄运动中仍然成立，完全适用。但是必须注意，由于瞬时加速度不同于真实加速度，故凡涉及对时间进行微商运算的关系式在受摄运动中不一定能应用。可见，瞬时椭圆概念的引入使摄动问题与二体问题密切联系起来，为解决摄动问题提供了实际的直观的依据。

在实际天体的运动中，有很多例子可以说明瞬时椭圆的实际意义。最明显的一个实例是天体在太阳辐射压摄动下的运动，当辐射压起作用时，天体的瞬时椭圆不断变化，但当天体进入一个阳光照不到的阴影区时，辐射压消失，天体就沿着入影点时刻的瞬时椭圆运动下去直至跑出这个阴影区为止。

二、太阳系中几种常见的摄动因素

1. 太阳系内其他天体所产生的摄动 在太阳系内，行星在运动中除受太阳的中心引力外，最重要的是受其他天体的吸引力作用，这些吸引力相对于中心引力而言是小量，因此都作为摄动因素。由于摄动力是有势力，存在摄动函数 正如第十七章中 (17.59)

式所给出的那样, 某个行星受另外 n 个行星吸引所产生的摄动函数可表为

$$R = \sum_{j=1}^n Gm_j \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_j + yy_j + zz_j}{r_j^3} \right)$$

关于 R 中各项的含义及所满足的摄动运动方程等前面已讨论过, 不再多述。

2. 径向摄动力 这种摄动力是沿被摄动体的向径方向, 一般称为径向摄动力或中心摄动力, 它们是向径的函数, 仅与天体的坐标有关。在具体讨论时, 可根据函数形式的复杂程度而采用不同的摄动运动方程。如果径向摄动力所产生的摄动函数比较容易得出, 则可以用拉格朗日行星运动方程来讨论。如果形式比较复杂, 则可直接用摄动力三分量表示的牛顿方程, 因为摄动力仅为 S 方向, $T=0$, $W=0$, 相应的方程形式可简化为

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2a^2 e \sin f}{\sqrt{\mu p}} S, \\ \dot{e} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin f \cdot S, \\ \dot{\omega} &= -\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\cos f}{e} \cdot S, \\ \dot{M}_0 &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(\cos f - \frac{2er}{p} \right) S, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{d\Omega}{dt} = 0, \\ \dot{p} &= \dot{a}(1-e^2) - 2ae\dot{e} = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}} T = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.43)$$

由此可得

$p=p_0$, $i=i_0$, $\Omega=\Omega_0$ 都是常数。这说明径向摄动力不论是何种形式, 对轨道平面的空间位置没有影响, 由于 $h=\sqrt{\mu p}=\text{常数}$, 因此, 在径向摄动下, 天体运动的总动量矩大小和方向保持不变。又根据(18.43)的第一式和第二式可知

$$\dot{a} = \frac{2a^2 e}{p} \dot{e}.$$

即 $\dot{a}$ 和 $\dot{e}$ 同号, a 和 e 同时增大或减小。

在太阳系中最常见的几种径向摄动力有:

(1) 中心天体的非球形。此时, 中心体不能视为质点在特殊情况下, 中心体吸引力所产生的势函数可写为

$$U = \frac{GM}{r} + G \sum_{l=1}^{\infty} \frac{A_{2l}}{r^{2l+1}}.$$

于是, 中心体非球对称部分产生的摄动加速度为

$$S = -G \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l+1)A_{2l+1}}{r^{2l+2}}.$$

其中 M 为中心体质量, A_{2l} 为与中心体内部密度分布有关的常数。

(2) 中心天体的辐射压力。最常见的是太阳的光压力, 光压力所产生的摄动加速度为

$$S = \frac{k}{r^2} \quad k \text{ 为辐射系数}.$$

(3) 中心天体的质量变化。许多天体都有大量的微粒辐射和电磁辐射, 这些辐射作用使中心天体的质量随时间而不断减小, 即 $M = M_0 - M(t)$ 。 M_0 为中心天体原始质量。中心体的吸引力则成为

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \frac{r}{r} = -\frac{GM_0 m}{r^2} \frac{r}{r} + \frac{GM(t)m}{r^2} \frac{r}{r}.$$

因此 $S = \frac{GM(t)}{r^2}, T = W = 0.$

3. 介质阻尼力 绝大多数天体在运动过程中都受星际介质或气体的阻尼作用, 特别是在讨论人造地球卫星的运动时, 大气阻力是不可忽视的摄动因素。大气阻力是与天体运动速度方向相反的力, 即沿着与轨道切线方向相反的方向作用, 此时有:

$$U = -F, \quad N = 0, \quad W = 0.$$

因此, 按(18.40)式得

$$\left. \begin{aligned} S &= -\frac{e \sin f}{\sqrt{1+2e \cos f + e^2}} F, \\ T &= -\frac{1+e \cos f}{\sqrt{1+2e \cos f + e^2}} F. \end{aligned} \right\} \quad (18.44)$$

将上式代入(18.37)式即可得相应的摄动运动方程。

在一般情况下, 介质阻尼力 F 与天体运动速度大小 v 的 k 次方成正比, 如果不考虑介质本身的运动, 则

$$\left. \begin{aligned} U &= -F = -A\rho v^k \\ &= -A\rho \left(\frac{\mu}{p}\right)^{\frac{k}{2}} (1+2e \cos f + e^2)^{\frac{k}{2}} \\ N &= 0 \\ W &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.45)$$

其中 A 是阻尼系数, 为常数, ρ 为介质密度。将上式代入牛顿方程(18.37)后可知, 介质阻尼力对 i, Ω 没有影响, 即不会引起天体运动轨道平面在空间位置的变化。对其它几个根数都有影响, 特别是轨道半长径 a 的变化方程为

$$\dot{a} = -2A\rho \left(\frac{\mu}{p}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{(1+2e \cos f + e^2)^{\frac{k+1}{2}}}{n\sqrt{1-e^2}} \quad (18.46)$$

在上式中所有的量都是正值, 因此 $\dot{a} < 0$ 。这说明, 任何运动天体在介质阻尼力的摄动作用下, 轨道半长径 a 将不断单调减小。正是由于这个原因, 人造地球卫星在大气阻力作用下轨道越来越小, 越来越接近地面, 直至陨落。

§ 18.5 解摄动运动方程的基本方法

本节概要地介绍天体力学中解摄动运动方程的三种方法: 分

析方法、数值方法和定性方法。

(1) 天体力学分析方法是最经典的一种解法。它采用级数展开方法求出摄动运动方程的近似解, 将天体的受摄坐标和受摄轨道根数表示为时间或各种近点角的级数。分析方法是摄动理论的主要内容, 其课题主要有两大类: 一类是具体天体的摄动理论, 如月球运动理论, 大行星运动理论, 人造地球卫星运动理论等等。另一类是解决摄动问题的共同性或关键性的问题, 如摄动函数展开问题、中间轨道理论和变换理论。

分析方法是最早提出, 研究得最深入的一种方法。尽管它给出的是一种近似解, 但仍能从中了解到天体运动及轨道变化的一些特征。但近年来, 由于各种新技术的应用以及快速大型电子计算机的发展, 使得观测精度大大提高, 观测资料数量陡增, 以致原有的分析方法和各种天体运动理论急需更新, 这就使分析方法面临着严峻的考验。

(2) 天体力学数值方法就是在求解天体摄动运动方程时所采用的常微分方程的数值解法, 又称为特殊摄动法。它的主要内容有: 天体在某些具体时刻的受摄坐标, 受摄速度和受摄轨道根数的数值计算; 各种计算方法收敛性, 稳定性的研究和改进; 计算误差的积累和传播规律的讨论。由于电子计算机的广泛使用, 使数值方法得到迅速发展。目前, 对于解决时间范围不长(例如在天体运动一百个周期以内)的天体运动问题一般都直接采用数值方法。特别是在人造卫星的精密定轨工作中及外行星的星历表计算等问题中数值方法是主要研究手段。近年来, 在小恒星系统及 N 体问题的研究中, 也常用数值方法进行数值探索工作。

常用的数值计算方法有: 以直角坐标为变量的科威耳方法, 它是求多体问题数值解的主要方法; 以天体直角坐标的摄动量为变量的恩克方法, 它常用于计算短周期彗星和月球火箭的轨道;

以轨道根数或天体坐标和速度为变量的亚当斯方法和龙格-库塔方法，它们常用于计算人造卫星的轨道。随着各种计算方法和技术的改进，数值方法正受到越来越广泛的重视。

分析方法和数值方法都是定量方法，由于分析展开式的收敛性及数值计算误差的累积等问题无法根本解决，使得这两种方法只能用于天体在有限间隔内的运动状况的研究。

(3) 天体力学定性方法主要研究天体在相对长(包括趋于无穷)时间内的运动状态和天体运动轨道在运动方程奇点(包括无穷大值、多值和不定值三种奇点)附近的性质。它不是具体去求解天体的轨道，而是探讨这些运动的特性，因此又称为定性理论。

定性理论属于常微分方程定性理论的范畴，近二十年来发展较快，其主要内容可分为三部分：一是研究天体在紧密接近时轨道剧烈变化而产生的碰撞问题，俘获问题和交换问题；二是研究时间趋于无穷时的运动特性，如天体特殊轨道的存在性、稳定性和周期解理论等；第三是研究运动的全局性质，运动区域及太阳系的稳定性等。

上述三种基本方法各有特色，相辅相成。近年来在讨论实际问题时常将这几种方法相互渗透，交叉应用。例如半分析半数值方法就是分析方法和数值方法相结合的产物。又如，定性理论中的俘获问题、特殊轨道的存在性问题等也常用数值计算来检验。这三种基本方法都不是很完善的，必须对各种方法进行更深入的研究，使其改进和发展，才能适应日益发展的天文理论和观测精度的要求。

§ 18.6 摄动运动方程的分析解法原理

作为天文学基础教程，在本书中仅讲述经典的较为完善的天

体力学分析方法。本节主要介绍摄动运动方程的分析解法原理和步骤。

考察在 § 18.4 中所介绍各类摄动因素, 可以发现它们都包含小量因子。例如, 在考虑其他行星所产生的摄动时, 摄动行星对被摄动行星吸引产生的摄动函数中包含有摄动行星的质量。在太阳系中, 最大行星——木星的质量也仅为太阳的 $\frac{1}{1047}$, 因此可将摄动行星的质量视为小量。如果摄动因素是中心体的非球形或介质阻尼, 则这些摄动力内都含有中心体扁率因子或介质阻尼因子, 通常它们都小于 0.001 的数量级, 也是小量因子。可见, 无论是何种摄动因素, 必须包含有小量因子才能保证摄动力与中心引力相比是小量。在这种条件下, 拉格朗日行星运动方程 (18.21) 式或牛顿方程 (18.37) 式的右端都含有小量因子 ϵ (ϵ 为 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 数量级), 通常称它们为小参数。于是, 拉格朗日行星运动方程和牛顿方程都可视为右端含有小参数的一阶常微分方程组。而天体力学的分析方法就是求出这些常微分方程组按它们所含小参数展开的级数解。下面以三体问题的拉格朗日行星运动方程分析解为例来叙述它们的解法原理和步骤。

一、级数解

设 P 和 P' 分别为被摄动行星和摄动行星。它们的质量分别为 m 、 m' , 轨道根数为 $(a, e, i, \omega, \Omega, M_0)$ 和 $(a', e', i', \omega', \Omega', M'_0)$ 。 P 的拉格朗日行星运动方程可写为

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0} \\ \dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left(\sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right), \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left(\cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right),\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Omega} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \dot{\omega} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \dot{M}_0 &= -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \end{aligned} \right\} \quad (18.47)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R &= Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right), \\ \Delta &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \\ r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.48)$$

(18.48)式的摄动函数 R 内不仅包含被摄动行星 P 的坐标 (x, y, z) ，还包括摄动行星的坐标 (x', y', z') ，故 R 是两个行星 P, P' 的坐标或轨道根数和时间 t 的函数。要求解(18.47)式，必须同时考虑行星 P' 的运动规律。而 P' 的摄动运动方程与(18.47)式和(18.48)式形式上完全相同，只是所有的轨道根数和其他量都换成带“ $'$ ”的量， P' 所受的摄动函数为

$$\left. \begin{aligned} R' &= Gm \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right), \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.49)$$

显然，要解决三体问题必须同时求解 P, P' 两组拉格朗日行星运动方程，它们一共有12个一阶常微分方程。

为简化起见，用 $p_i, q_i (i=1, 2, 3, \dots, 6)$ 分别表示 P 和 P' 的轨道根数，并将摄动函数 R 和 R' 内的小参数 m 和 m' 提出 R, R' 之外，则行星 P, P' 的两组拉格朗日行星运动方程可简写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= m' F_i(p, q, t) \\ \dot{q}_i &= m G_i(p, q, t) \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, 6) \quad (18.50)$$

式中 $F_i(p, q, t), G_i(p, q, t)$ 表示两组方程右端的函数，其中 p, q 代表所有的轨道根数 p_i, q_i 。要求得(18.50)式的完全解

是十分困难的, 至今为止, 只能找出近似解。

(18.50) 式中, p_i, q_i 除了显含小参数 m, m' 外, 还通过函数 F_i, G_i 中的 p, q 而隐含着 m, m', p, q 。现在将方程两边的 p_i, q_i 和 F_i, G_i 都进行展开, 展成小参数 m, m' 的幂级数。设 p_i, q_i 的级数展开形式为

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p_i^{(0,0)} + m p_i^{(1,0)} + m' p_i^{(0,1)} + m^2 p_i^{(2,0)} \\ &\quad + m m' p_i^{(1,1)} + m'^2 p_i^{(0,2)} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} m^j m'^k p_i^{(j,k)}, \\ q_i &= q_i^{(0,0)} + m q_i^{(1,0)} + m' q_i^{(0,1)} + m^2 q_i^{(2,0)} \\ &\quad + m m' q_i^{(1,1)} + m'^2 q_i^{(0,2)} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} m^j m'^k q_i^{(j,k)}. \end{aligned} \right\} \quad (18.51)$$

(18.51) 式称为 p_i, q_i 的形式解, 式中 $p_i^{(j,k)}, q_i^{(j,k)}$ 为展开式中 m^j, m'^k 的系数。如果能将这系数逐一求出而后代入 (18.51) 式, 就可得到 p_i, q_i 的近似解。

由于 F_i, G_i 内隐含有小参数 m, m' , 将这些函数按马克劳林级数展开为 m, m' 的幂级数, 其形式为

$$\left. \begin{aligned} F_i &= (F_i)_0 + m \left(\frac{\partial F_i}{\partial m} \right)_0 + m' \left(\frac{\partial F_i}{\partial m'} \right)_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[m^2 \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial m^2} \right)_0 + 2 m m' \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial m \partial m'} \right)_0 \right. \\ &\quad \left. + m'^2 \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial m'^2} \right)_0 \right] + \dots \\ G_i &= (G_i)_0 + m \left(\frac{\partial G_i}{\partial m} \right)_0 + m' \left(\frac{\partial G_i}{\partial m'} \right)_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[m^2 \left(\frac{\partial^2 G_i}{\partial m^2} \right)_0 + 2 m m' \left(\frac{\partial^2 G_i}{\partial m \partial m'} \right)_0 \right. \\ &\quad \left. + m'^2 \left(\frac{\partial^2 G_i}{\partial m'^2} \right)_0 \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (18.52)$$

其中 $\left(\frac{\partial F_i}{\partial m}\right)_0, \left(\frac{\partial G_i}{\partial m}\right)_0, \dots$ 表示 F_i, G_i 对 m, m' 求过偏导数后以 $m = m' = 0$ 代入。

F_i, G_i 是 p, q, t 的函数, 而由 (18.51) 式知, p, q 可展开为 m, m' 的幂级数, 按隐函数定理可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial m} &= \sum_{s=1}^6 \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial m} + \frac{\partial F_i}{\partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial m} \right), \\ \frac{\partial F_i}{\partial m'} &= \sum_{s=1}^6 \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial m'} + \frac{\partial F_i}{\partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial m'} \right).\end{aligned}$$

同理也可得 G_i 对 m, m' 的偏导数表示式以及 F_i, G_i 对 m, m' 的高阶偏导数的表示式。

用形式解 (18.51) 代入上述这些偏导数表示式可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_i}{\partial m}\right)_0 &= \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\right)_0 p_s^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_s}\right)_0 q_s^{(1,0)} \right], \\ \left(\frac{\partial F_i}{\partial m'}\right)_0 &= \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\right)_0 p_s^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_s}\right)_0 q_s^{(0,1)} \right], \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

而后将这些结果代入 (18.52) 式得到

$$\left. \begin{aligned}F_i(p, q, t) &= (F_i)_0 + m \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\right)_0 p_s^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_s}\right)_0 q_s^{(1,0)} \right] + m' \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s}\right)_0 p_s^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_s}\right)_0 q_s^{(0,1)} \right] + \dots \\ G_i(p, q, t) &= (G_i)_0 + m \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial G_i}{\partial p_s}\right)_0 p_s^{(1,0)} + \left(\frac{\partial G_i}{\partial q_s}\right)_0 q_s^{(1,0)} \right] + m' \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial G_i}{\partial p_s}\right)_0 p_s^{(0,1)} + \left(\frac{\partial G_i}{\partial q_s}\right)_0 q_s^{(0,1)} \right] + \dots\end{aligned} \right\} \quad (18.53)$$

将(18.51)式和(18.53)式代入(18.50)式可得

$$\begin{aligned}
 & \dot{p}_i^{(0,0)} + m\dot{p}_i^{(1,0)} + m'\dot{p}_i^{(0,1)} + m^2\dot{p}_i^{(2,0)} \\
 & + mm'\dot{p}_i^{(1,1)} + m'^2\dot{p}_i^{(0,2)} + \dots \\
 & = m(F_i)_0 + mm' \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)} \right] \\
 & + m'^2 \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(0,1)} \right] + \dots, \\
 & \dot{q}_i^{(0,0)} + m\dot{q}_i^{(1,0)} + m'\dot{q}_i^{(0,1)} + m^2\dot{q}_i^{(2,0)} \\
 & + mm'\dot{q}_i^{(1,1)} + m'^2\dot{q}_i^{(0,2)} + \dots \\
 & = m(G_i)_0 + m^2 \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(1,0)} + \left(\frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)} \right] \\
 & + mm' \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)} + \left(\frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(0,1)} \right] + \dots,
 \end{aligned} \tag{18.54}$$

比较(18.54)式两端 m , m' 的同次幂系数得

$$\dot{p}_i^{(0,0)} = 0, \quad \dot{q}_i^{(0,0)} = 0. \tag{18.55}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \dot{p}_i^{(1,0)} = 0, \quad \dot{q}_i^{(0,1)} = 0, \\
 & \dot{p}_i^{(0,1)} = (F_i)_0 = F_i(p^{(0,0)}, q^{(0,0)}, t), \\
 & \dot{q}_i^{(1,0)} = (G_i)_0 = G_i(p^{(0,0)}, q^{(0,0)}, t),
 \end{aligned} \right\} \tag{18.56}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \dot{p}_i^{(2,0)} = 0, \quad \dot{q}_i^{(0,2)} = 0, \\
 & \dot{p}_i^{(1,1)} = \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)} \right], \\
 & \dot{q}_i^{(1,1)} = \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)} + \left(\frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(0,1)} \right], \\
 & \dot{p}_i^{(0,2)} = \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(0,1)} \right], \\
 & \dot{q}_i^{(2,0)} = \sum_{s=1}^6 \left[\left(\frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(1,0)} + \left(\frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)} \right], \\
 & \dots\dots
 \end{aligned} \right\} \tag{18.57}$$

高次幂项可作此类推下去,一般项 $p_i^{(j,k)}$ 和 $q_i^{(j,k)}$ 的表达式也容易得出。(18.55)---(18.57) 是形式解(18.51)式各项系数所满足的一阶微分方程,如能逐一积分得出,则就可得形式解的确切形式。因此,求摄动运动方程的解就归结为求介各项系数所满足的微分方程。

二、积分常数的确定

在积分(18.55)---(18.57)等式之前,先来讨论一下积分常数的确定问题。

首先由(18.55)式可得 $p_i^{(0,0)}$ 和 $q_i^{(0,0)}$ 为常数,设 $p_i^{(0,0)} = p_i^{(0)}$, $q_i^{(0,0)} = q_i^{(0)}$, 此时 $m = m' = 0$, 因此 $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$ 为无摄时的轨道根数,共有 12 个。但是三体问题的摄动运动方程为 12 个一阶微分方程组,它的完全解应有 12 个相互独立的积分常数。现根据(18.55)式积分已得出 12 个相互独立的积分常数,为此必须证明由(18.56)式, (18.57)式及以后的高次项系数方程积分所得的积分常数都只是 $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$ 的函数,不再出现独立的积分常数。

方程(18.50)式表明, $\dot{p}_i$ 的方程右端每一项都含有 m' 的因子,而 $\dot{q}_i$ 的方程右端每一项都有 m 作因子,因此在比较系数过程中可得关系式

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^{(1,0)} = \dot{p}_i^{(2,0)} = \dots = \dot{p}_i^{(j,0)} &= 0, \\ \dot{q}_i^{(0,1)} = \dot{q}_i^{(0,2)} = \dots = \dot{q}_i^{(0,k)} &= 0. \end{aligned}$$

其中 j, k 为任意正整数,这个规律也可从(18.56)第一式和(18.57)第一式推广得到。上两式积分后可得

$$p_i^{(j,0)} = a_i^{(j,0)}, \quad q_i^{(0,k)} = b_i^{(0,k)} \quad (18.58)$$

在此 $a_i^{(j,0)}$, $b_i^{(0,k)}$ 也为积分常数。

如(18.56)式和(18.57)式所示,对于一般的 $p_i^{(j,k)}$ ($k \neq 0$) 和 $q_i^{(j,k)}$ ($j \neq 0$) 积分后的结果可记为

$$\left. \begin{aligned} p_i^{(j,k)} &= f_i^{(j,k)}(t) - a_i^{(j,k)} \quad (k \neq 0) \\ q_i^{(j,k)} &= g_i^{(j,k)}(t) - b_i^{(j,k)} \quad (j \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (18.59)$$

其中 $-a_i^{(j,k)}$, $-b_i^{(j,k)}$ 也为积分常数。

现在将(18.58)和(18.59)式代入形式解(18.51)可得

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \sum_{j=0}^{\infty} m^j a_i^{(j,0)} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m^j m'^k [f_i^{(j,k)}(t) - a_i^{(j,k)}] \\ q_i &= \sum_{k=0}^{\infty} m'^k b_i^{(0,k)} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m^j m'^k [g_i^{(j,k)}(t) - b_i^{(j,k)}] \end{aligned} \right\} \quad (18.60)$$

上式在运动初始时刻 $t=t_0$ 时也成立, 此时左端为 p_i , q_i 的无摄运动值, 以 $p_i=p_i^{(0)}$, $q_i=q_i^{(0)}$ 代入后比较 $t=t_0$ 时刻两端 m , m' 的同次幂系数就可确定积分常数。结果为

$$\left. \begin{aligned} a_i^{(0,0)} &= p_i^{(0)}, \quad b_i^{(0,0)} = q_i^{(0)}, \\ a_i^{(j,0)} &= 0, \quad b_i^{(0,k)} = 0, \\ a_i^{(j,k)} &= f_i^{(j,k)}(t_0), \quad (k \neq 0), \\ b_i^{(j,k)} &= g_i^{(j,k)}(t_0) \quad (j \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (18.61)$$

式中 $f_i^{(j,k)}(t_0)$ 和 $g_i^{(j,k)}(t_0)$ 表示在函数 f_i , g_i 中所有的轨道根数都换以初始时刻的根数值 $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$ 。由此可见, (18.61)式证明在积分过程中所出现的积分常数都可以用 $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$ 以及它们的函数关系来表示, 因而只有 12 个相互独立的积分常数。

上述结论也说明, 在求解形式解的各次幂系数 $p_i^{(j,k)}$ 和 $q_i^{(j,k)}$ ($j, k=1, 2, \dots, \infty$) 时, 可以采用定积分的形式, 积分下限取为初始历元时刻 t_0 , 积分上限可取为任意时刻 t , 被积函数内的轨道根数可以看作是常数。

三、一阶摄动和二阶摄动

在积分常数确定后, 现在来考虑(18.55), (18.56), (18.57)等式表示的微分方程的解。

(18.55)式表示形式解中 m, m' 的零次幂项系数所满足的方程, 积分后可得

$$p_i^{(0,0)} = p_i^{(0)}, \quad q_i^{(0,0)} = q_i^{(0)}.$$

上式表示轨道根数为常数的无摄运动。

(18.56)式为 p_i, q_i 的形式解中, m, m' 一次幂项前面的系数所满足的方程。前面已经证明

$$p_i^{(j,0)} = a_i^{(j,0)} = 0, \quad q_i^{(0,k)} = b_i^{(0,k)} = 0.$$

因此只需讨论

$$\dot{p}_i^{(0,1)} = (F_i)_0 = F_i(p_i^{(0)}, q_i^{(0)}, t),$$

$$\dot{q}_i^{(1,0)} = (G_i)_0 = G_i(p_i^{(0)}, q_i^{(0)}, t).$$

其中 F_i, G_i 表示两组拉格朗日行星运动方程相应的右端函数, 上两式表明, F_i, G_i 中仅需以 $t=t_0$ 时的根数值代入, 因而右端除时间 t 外都是常数, 可以直接积分求出 $p_i^{(0,1)}$ 和 $q_i^{(1,0)}$, 通常把 m, m' 的一次幂项前面的系数 $p_i^{(0,1)}, q_i^{(1,0)}$ 称为一阶摄动。

由于右函数 F_i, G_i 形式比较复杂, 因而在求解一阶摄动时, 必须首先将 F_i, G_i 表示为轨道根数和时间 t 的显函数, 而后以 $t=t_0$ 时的根数值代替右函数内所有的轨道根数, 再对 t 直接积分, 积出 $p_i^{(0,1)}, q_i^{(1,0)}$ 后, 若只取到 m, m' 的一次幂, 则形式解可表为

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p_i^{(0)} + m' p_i^{(0,1)}, \\ q_i &= q_i^{(0)} + m q_i^{(1,0)}. \end{aligned} \right\} \quad (18.62)$$

(18.62)式称为准至一阶摄动的解。

形式解中包含有 m, m' 的二次幂的项, 叫做二阶摄动。

(18.57) 式给出求二阶摄动的微分方程组。根据对积分常数的讨论, 可将(18.57)式简化为

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i^{(1,1)} &= \sum_{s=1}^6 \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)}, \\ \dot{q}_i^{(1,1)} &= \sum_{s=1}^6 \left(\frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)}, \\ \dot{p}_i^{(0,2)} &= \sum_{s=1}^6 \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)}, \\ \dot{q}_i^{(2,0)} &= \sum_{s=1}^6 \left(\frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)}. \end{aligned} \right\} \quad (18.63)$$

其中 $p_s^{(0,1)}$, $q_s^{(1,0)}$ 即为上面得出的一阶摄动结果, 而 $\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0$, $\left(\frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0$, $\left(\frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0$, $\left(\frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0$ 为 $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$ 和 t 的函数。如果将 F_i , G_i , 亦即摄动函数 R 展开为轨道根数和时间 t 的显函数后, 再以 $t=t_0$ 时的根数值和一阶摄动解代入上式右端即可直接对 t 积分求出 $p_i^{(1,1)}$, $q_i^{(1,1)}$, $p_i^{(0,2)}$, $q_i^{(2,0)}$, 以此代入形式解, 即可得

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p_i^{(0)} + m' p_i^{(0,1)} + m m' p_i^{(1,1)} + m'^2 p_i^{(0,2)}, \\ q_i &= q_i^{(0)} + m q_i^{(1,0)} + m m' q_i^{(1,1)} + m^2 q_i^{(2,0)}. \end{aligned} \right\} \quad (18.64)$$

(18.64) 式称为准至二阶摄动的解。

对于含有 m , m' 的高次幂的高阶摄动也可以类似讨论, 得到准至所需精度的解。在太阳系中, 由于行星的质量与太阳相比很小, 观测技术和观测精度还达不到非常高的要求, 故一般在讨论行星运动时只要求准至一阶摄动, 最多考虑二阶摄动就足够了。

本节所述的对三体问题的拉格朗日行星运动解法原理也完全适用于四体乃至多体问题摄动运动方程的求解, 只是过程更为繁复, 工作量更大而已。

§ 18.7 摄动函数展开方法轮廓

在上节求解一阶摄动、二阶摄动时都要求首先将方程的右函数 F_i , G_i 展开为轨道根数和时间 t 的显函数而后才能求积分。右函数展开实质上归结为将摄动函数展开为轨道根数和 t 的显函数问题。这个问题是解摄动运动方程的一个关键问题,也是摄动理论的基本课题之一。

经典的展开方法是將摄动函数展开为幂级数和三角级数的混合级数,又称为泊松(S. D. Poisson)级数。现在,仍以三体问题为例来讲述摄动函数展开为泊松级数的方法概要。

一、摄动函数的轨道意义

三体问题中,摄动行星 P' 对被摄动行星 P 吸引所产生的摄动函数为

$$R = Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right),$$

其中 $\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.

由图 18.4 可看出, P 和 P' 之间的距离 Δ 可表为两行星的日心向径 r, r' 和它们在太阳处的张角 H 的函数。由三角形的余弦定律得

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H$$

又利用矢量运算规则得

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' &= xx' + yy' + zz' \\ &= rr' \cos H \end{aligned}$$

图 18.4 摄动函数中
各量的几何意义

将上两式代入摄动函数 R 的表达式中, 即有

$$R = Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{rr' \cos H}{r'^3} \right). \quad (18.65)$$

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H}. \quad (18.66)$$

一般把 $\frac{1}{\Delta}$ 称为摄动函数 R 的主要项, 第二项 $\frac{rr' \cos H}{r'^3}$ 称为辅助项。可以证明辅助项是主要项的特殊情况, 故摄动函数的展开可归结为主要项的展开。

在图 18.5 中, 设大圆 $\Upsilon N'N$ 为黄道, 大圆 NIP 和 $N'IP'$ 分别为行星 P, P' 的轨道, I 为其交角, Π, Π' 分别为两行星的近日点方向, Υ 为某历元时刻的春分点。设任一 t 时刻, 两行星位于 P 和 P' 处, 它

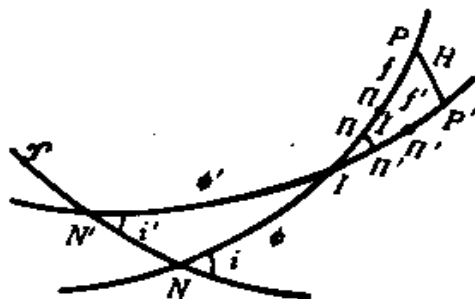


图 18.5 主要项 $\frac{1}{\Delta}$ 的展开

们在太阳处的张角为 H , H 可以用大圆弧 $\widehat{PP'}$ 来表示。

如图所示, $\Pi P = f, \Pi' P' = f', \Pi I = \Pi, \Pi' I = \Pi'$, 另外设

$$l = IP = f + \Pi, \quad l' = IP' = f' + \Pi'.$$

由球面三角形 IPP' 中的余弦公式得

$$\cos H = \cos l \cos l' + \sin l \sin l' \cos I. \quad (18.67)$$

按照轨道根数的定义, 对照图 18.5 有

$$\Upsilon N = \Omega, \quad \Upsilon N' = \Omega',$$

$$\angle INN' = 180^\circ - i, \quad \angle IN'N = i'.$$

在球面三角形 INN' 中, 六个元素可分别表为: $180^\circ - i, i', I, \phi = N\Pi - \Pi\Pi' = \omega - \Pi, \phi' = N'\Pi' - \Pi'\Pi = \omega' - \Pi', NN' = \Omega - \Omega'$.

则可得下列球面三角关系式:

$$\left. \begin{aligned} \cos I &= \cos i \cos i' + \sin i \sin i' \cos(\Omega - \Omega'), \\ \sin I \sin \phi &= \sin i' \sin(\Omega - \Omega'), \\ \sin I \sin \phi' &= \sin i \sin(\Omega - \Omega'), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin I \cos \phi &= \cos i' \sin i - \sin i' \cos i \cos(\Omega - \Omega'), \\ \sin I \cos \phi' &= -\sin i' \cos i + \cos i' \sin i \cos(\Omega - \Omega'). \end{aligned} \right\} \quad (18.68)$$

利用这些关系式可解出 I, ϕ, ϕ' 为 i, Ω, i', Ω' 的函数, 从而得到 Π 和 Π' 为 i, Ω, ω 和 i', Ω', ω' 的函数, 将这些结果代入(18.67)式可将 $\cos H$ 表示为 $i, \Omega, \omega, i', \omega', \Omega', f$ 和 f' 的函数。因此摄动函数也可表为两行星的轨道根数和真近点角 f, f' 的函数。但是, 这种函数关系十分复杂, 且并没有展开为 t 的显函数, 为此必须作逐步近似展开。

二、展开为 $\frac{I}{2}$ 的三角级数

I 是两行星轨道面之间的交角, 对大行星而言, 轨道倾角 i, i' 都很小, 轨道面都接近于黄道面, 故 I 也很小, 可作为小量因子展开。令

$$\delta^2 = \sin^2 \frac{I}{2}.$$

$$\text{则} \quad \cos I = 1 - 2 \sin^2 \frac{I}{2} = 1 - 2\delta^2.$$

以此代入(18.67)式有

$$\begin{aligned} \cos H &= \cos l \cos l' + \sin l \sin l' (1 - 2\delta^2) \\ &= \cos(l - l') - 2\delta^2 \sin l \sin l'. \end{aligned}$$

将上式代入(18.66)式可得

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H \\ &= r^2 + r'^2 - 2rr' [\cos(l - l') - 2\delta^2 \sin l \sin l'] \\ &= \Delta_1^2 + 4\delta^2 rr' \sin l \sin l' \\ &= \Delta_1^2 [1 + 4\delta^2 rr' \Delta_1^{-2} \sin l \sin l'] \end{aligned} \quad (18.69)$$

其中

$$\Delta_1^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(l-l'). \quad (18.70)$$

因而

$$\Delta^{-1} = \Delta_1^{-1} [1 + 4\delta^2 rr' \Delta_1^{-2} \sin l \sin l']^{-\frac{1}{2}}. \quad (18.71)$$

由于 l 是小量, 按定义 $\delta^2 = \sin^2 \frac{f}{2}$ 是二阶小量, Δ_1 是两行星间的距离在某一行星轨道面上的投影, $\Delta \approx \Delta_1$, 在大行星运动中, 各行星的公转周期相差较大, 故 Δ 比较大, Δ_1 也是大量, 从而

$$|4\delta^2 rr' \Delta_1^{-2} \sin l \sin l'| < 1.$$

这就保证了(18.71)式可按二项式定理展开为 δ 的幂级数, 即

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= \Delta_1^{-1} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k C_k \delta^{2k} r^k r'^k \Delta_1^{-2k} \sin^k l \sin^k l' \right] \\ &= \Delta_1^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k C_k \delta^{2k} r^k r'^k \Delta_1^{-(2k+1)} \sin^k l \sin^k l'. \end{aligned} \quad (18.72)$$

其中
$$C_k = 4^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}.$$

三、展开为 α 的幂级数

(18.72)式仍为时间 t 的隐函数展开式, 在 r, r', l, l' 中隐含时间变量, 为得到 t 的显函数形式, 可先令两行星的偏心率 $e=e'=0$, 即先考虑两行星在圆轨道上运动。此时相应地有 $r=a, r'=a'$, 设 M, M' 为两行星的平近点角, 则当 $e=e'=0$ 时, 有

$$l=L=M+\Pi, \quad l'=L'=M'+\Pi'.$$

Δ_1 也变换为

$$\Delta_1^2 = \Delta_0^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(L-L'). \quad (18.73)$$

此时 Δ 也因此表为

$$(\Delta)_0^{-1} = \Delta_0^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k C_k a^k a'^k \delta^{2k} \Delta_0^{-(2k+1)} \sin^k L \sin^k L'. \quad (18.74)$$

引入参数 $\alpha = \frac{a}{a'}$ 和算符

$$D=1+a^2-2a\cos H_0, \quad H_0=L-L'. \quad (18.75)$$

由此(18.74)式可表为

$$(\Delta)_0^{-1} = \Delta_0^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k C_k \delta^{2k} \frac{a^k}{a'} D^{-\frac{2k+1}{2}} \sin^k L \sin^k L'.$$

拉普拉斯进一步将 $D^{-\frac{2k+1}{2}}$ 展开为

$$\left. \begin{aligned} D^{-s} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^s \cos n(L-L'), \\ s &= \frac{2k+1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.76)$$

其中 B_n^s 称为拉普拉斯系数。

应用三角函数的积化和差公式可得

$$\sin^k L \sin^k L' = \sum_{i,j} A_{i,j}^k \cos(iL+jL'). \quad (18.77)$$

式中的 $A_{i,j}^k$ 为常数, i, j 是从 $-k$ 到 $+k$ 求和, 综合(18.76)式和(18.77)式可得

$$(\Delta)_0^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A(k, n, i, j) \cos(iL+jL'). \quad (18.78)$$

系数 $A(k, n, i, j)$ 是 a, a', δ^2 等轨道根数的函数, 至此, $(\Delta)_0^{-1}$ 展开为 L, L' 的三角级数, 而 L, L' 是平近点角

$$M = nt + M_0, \quad M' = n't + M'_0$$

的函数, 因而 $(\Delta)_0^{-1}$ 已展为 t 的显函数。

四、按 e, e' 的幂级数展开

在实际情况下, $e \neq 0, e' \neq 0$, 因此必须在 $(\Delta)_0^{-1}$ 展开式的基础上考虑 e, e' 的改正, 当 $e \neq 0, e' \neq 0$ 时

$$r = a - ae \cos E = a + x, \quad r' = a' - a'e' \cos E' = a' + x',$$

$$l = f + \Pi = M + (f - M) + \Pi = L + v,$$

$$l' = f' + \Pi' = M' + (f' - M') + \Pi' = L' + v',$$

其中 $x = -ae \cos E, x' = -a'e' \cos E',$

$$v = f - M, \quad v' = f' - M'.$$

在太阳系中,大多数行星的偏心率都比较小,中心差 $f - M, f' - M'$ 也较小,因此 x, x', v, v' 都可视为小量。将(18.72)式中的 r, r', l, l' 用上面的表示式代入可得

$$\Delta^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_k \delta^{2k} (a+x)^k (a'+x')^k \Delta_1^{-(2k+1)} \\ \times \sin^k(L+v) \sin^k(L'+v')$$

Δ^{-1} 可按 x, x' 等的小量因子展开,亦即展开为 e, e' 的幂级数。其系数可表为平近点角 M, M' 的三角多项式,这种展开方法称为纽康方法,详细的推导可参阅有关书籍①。

综合上述各展开步骤,最终可得主要项 Δ^{-1} 的展开式为

$$\frac{1}{\Delta} = \sum P_{mn}^{n'n'}(i, j) e^n e'^{n'} \cos(iL + jL' + mM + m'M'), \quad (18.79)$$

前面的求和号是对六个整数 i, j (从 $-\infty$ 到 $+\infty$); n, n' (从 0 到 $+\infty$); m (从 $-n$ 到 $+n$), m' (从 $-n'$ 到 $+n'$) 求和。系数 $P_{mn}^{n'n'}(i, j)$ 为 $a, a', i, i', \Omega, \Omega'$ 的函数。由 L, L' 的定义可知

$$iL + jL' + mM + m'M' \\ = (i+m)M + (j+m')M' + i\Pi + j\Pi'.$$

Π, Π' 是 $i, \omega, \Omega, i', \omega', \Omega'$ 的函数。

$$M = nt + M_0, \quad M' = n't + M'_0$$

故上式为轨道根数和 t 的函数。

摄动函数中的第二项是辅助项 $-\frac{r}{r'^2} \cos H$, 当 $e=e'=0$ 时,

① 易照华等编著《天体力学引论》(科学出版社, 1978 年版)。

$$\begin{aligned}
-\frac{r}{r'^2} \cos H &= -\frac{a}{a'^2} \left[\cos(L-L') \right. \\
&\quad \left. - 2 \sin L \sin L' \sin^2 \frac{I}{2} \right] \\
&= -\frac{a}{a'^2} \left[\cos(L-L') - \cos(L-L') \sin^2 \frac{I}{2} \right. \\
&\quad \left. + \cos(L+L') \sin^2 \frac{I}{2} \right]
\end{aligned}$$

显然这是 $(\Delta_0)^{-1}$ 展开式中的特殊项，可以并入主要项，最后，摄动函数的展开式可写为下面的形式

$$\begin{aligned}
R = Gm' \sum P_{mm'}^{nn'}(i, j) e^n e'^n \cos(iL + jL' \\
+ mM + m'M'). \quad (18.80)
\end{aligned}$$

(18.80)式是摄动函数展开式的一般形式，一般只需准到 e, e' 的三次幂项。目前，已得出准到 e, e' 的七次幂的结果，已经是十分繁杂了。

按照上述的展开方法，当 e, e', a 和 I 比较大时，展开式的项数需增多且收敛得相当慢，甚至不收敛，这是摄动函数展开问题中的基本困难。本世纪以来，不少人研究过改进展开式的收敛性问题，提出一些新的展开方法，但尚未得到理想的实用方法。

§ 18.8 摄动运动方程的解

利用摄动函数展开的结果，可以定性地讨论拉格朗日行星运动方程的解。

一、准至一阶摄动的解

在讨论一级摄动时，运动方程右端函数内的所有轨道根数都

可以用无摄轨道根数代入，它们都是常数。为讨论方便起见，将摄动函数的展开式(18.80)式改写为

$$\left. \begin{aligned} R &= m' \sum A \cos Q, \\ Q &= (pn + p'n')t + pM_0 + p'M_0 + q\omega + q'\omega' \\ &\quad + S\Omega + S'\Omega'. \end{aligned} \right\} \quad (18.81)$$

式中把万有引力常数并入系数 A 内， A 是 a, a', e, e', i, i' 的函数。求和号中 p, p' 是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 求和。当 $p=p'=0$ 时， Q 内就不显含 t ，可以把这些不含 t 的项单独列出得

$$R = m' \sum A_0 \cos Q_0 + m' \sum A \cos Q. \quad (18.82)$$

其中 A_0, A 仍为 a, a', e, e', i, i' 的函数， Q 仍由(18.81)中的第二式定义，是 t 的显函数，但

$$Q_0 = q\omega + q'\omega' + S\Omega + S'\Omega'$$

内不包含 t 。

若已知行星的瞬时轨道根数，则将(18.82)所表示的摄动函数展开式代入拉格朗日行星运动方程，积分后就可得出各轨道根数准至一阶摄动的解。在此，仅以 a 和 Ω 的求解为例来讨论一阶摄动的结果。

由拉格朗日行星运动方程知

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}.$$

由(18.82)式可看出 R 中的 A_0, A, Q_0 都不包含 M_0 ，因而 R 代入上式后得到

$$\dot{a} = \frac{-2m'}{na} \sum pA \sin Q.$$

两边对 t 积分后即得

$$a = a_0 + \frac{2m'}{na} \sum \frac{pA}{pn + p'n'} \cos Q. \quad (18.83)$$

此即为 a 的准至一阶摄动的解。

由于 Q 内显含 t , 故上式中含 $\cos Q$ 的每一项都是 t 的周期函数, 这种项称为周期项, 记为 $P. T.$, (18.83) 式可简写为

$$a = a_0 + P. T..$$

升交点黄经 Ω 的摄动运动方程为

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} = B \frac{\partial R}{\partial i}.$$

在 R 内只有系数 A_0 和 A 中显含 i , 故用 (18.82) 式代入上式后可得

$$\dot{\Omega} = m' B \sum \frac{\partial A_0}{\partial i} \cos Q_0 + m' B \sum \frac{\partial A}{\partial i} \cos Q.$$

上式右端第一项不显含 t , 在一阶摄动情况下它是常数, 将上式两边对 t 积分即得

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_0 + m' B \left(\sum \frac{\partial A_0}{\partial i} \cos Q_0 \right) t \\ + m' B \sum \frac{\partial A}{\partial i} \frac{\sin Q}{pn + p'n'}. \end{aligned} \quad (18.84)$$

令常数 β 为右端第二项的系数, 即

$$\beta = m' B \left(\sum \frac{\partial A_0}{\partial i} \cos Q_0 \right).$$

右端第三项为 t 的周期函数, 仍记为 $P. T.$, 则 (18.84) 可简化为

$$\Omega = \Omega_0 + \beta t + P. T.$$

此即 Ω 准至一阶摄动的解。同理可推得其他各轨道根数准至一阶摄动的解, 详细的推导可参阅有关的书^①。最终的结果为

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + P. T., \\ e &= e_0 + \beta t + P. T., \\ i &= i_0 + \beta t + P. T., \\ \omega &= \omega_0 + \beta t + P. T., \\ \Omega &= \Omega_0 + \beta t + P. T., \\ M_0 &= (M_0)_0 + \beta t + P. T.. \end{aligned} \right\} \quad (18.85)$$

① 如易照华等编著《天体力学引论》，科学出版社（1978）。

二、长期摄动和周期摄动

根据 (18.85) 式准至一阶摄动的结果, 可以定性地将其分为几种不同类型的摄动。

1. 长期摄动 (18.85) 式中, 含 βt 的项随着 t 的增加而单调变化, 这样的项称为摄动的长期项或长期摄动。它可对天体运动进行大尺度的粗线条描述, 用来概略地说明天体过去和未来的运动。

2. 周期摄动 在 (18.85) 中出现的 $P. T.$ 项是周期项, 又称为周期摄动。它们的一般形式为

$$\frac{m'A}{pn+p'n'} \sin[(pn+p'n')t+G],$$

或
$$\frac{m'A}{pn+p'n'} \cos[(pn+p'n')t+G].$$

其中 p, p' 为任意整数, 不能同时为零。 n, n' 为两个行星的平均运动角速度, 周期项的周期 T 为

$$T = \frac{2\pi}{pn+p'n'}.$$

在一般情况下, $pn+p'n'$ 不是小量, T 不大, 周期项前面的系数也不大。这种周期项称为短周期项或短周期摄动。但是, 当 $\frac{n}{n'} \simeq -\frac{p'}{p}$, 即两个行星的平均运动角速度 n 与 n' 之比接近于简单分数时, 使得 $pn+p'n'$ 很小, 这种情况称为近于通约或共振。此时, 这种周期项的周期很长, 前面的系数也很大, 这种项称为长周期项或长周期摄动。这种摄动对天体的运动有明显的影响, 它的影响有时甚至可以与长期项相当。对长周期项的分析, 可以用来测定一些有关的物理量, 故这种项在摄动理论和实际问题中很有价值。

在太阳系中有不少共振现象。例如，木星和土星的平均运动角速度（以平太阳日为单位）为： $n=299.13''$ ， $n'=120.45''$ ，当 $p=-2$ ， $p'=5$ 时， $pn+p'n'=3.99''$ ，与此相应的周期项的周期为 890 年，项前的系数达 $50'$ 。又如，天王星和海王星的

$$n=42.24''，n'=21.53''，$$

当 $p=2$ ， $p'=-1$ 时，相应项的周期可长达 4300 年。在自然卫星，小行星运动中也大量存在共振项。目前共振理论已成为天体力学的一个重要课题。

长期摄动，短周期摄动和长周期摄动等摄动解的结果在各阶摄动中都存在。如果准至一阶摄动，则可划分为一阶长期摄动，一阶短周期摄动和一阶长周期摄动等，对于二阶乃至高阶情况也可类似区分。

三、太阳系的稳定性问题

太阳系在长时期内是否保持稳定？每个大行星的轨道是否始终为椭圆？大行星有没有逃逸出太阳系，坠入太阳内部或者相互发生碰撞的可能性等等问题统称为太阳系的稳定性问题，它一直是人类极为关心的问题，也是天体力学定性理论和天体演化学的基本问题之一。

早在十八世纪，拉普拉斯和拉格朗日就开始研究这个问题，他们从拉格朗日行星运动方程的解来定性地讨论行星轨道半长轴 a 和偏心率 e 是否有长期摄动。正如 (18.85) 式所示，在一阶摄动情况下， a 没有长期摄动， e 存在长期摄动。后来，蒂塞朗 (F. F. Tisserand) 和泊松又先后证明，在二阶摄动中 a 也没有长期摄动。如果讨论三阶摄动，勒威耶 (V. J. J. Leverrier) 和厄吉尼提斯 (Eginitis) 等人找出了 a 的一个长期项。二十世纪以来，美伏罗瓦 (J. Meffroy) 等人又找出了 a 的一个三阶长期项。然而，

近年来梅塞奇(P. J. Message)曾证明, a 到任意阶都不存在长期摄动。至于偏心率 e , 研究表明, 它的各阶摄动中都存在长期项。长期摄动的存在意味着轨道根数随时间单调地变化, 这对于研究太阳系的稳定性极为重要。然而, 长期摄动的存在也不一定就意味着不稳定, 因为, 周期函数可以展开成幂级数形式, 比如

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$$

等等。太阳系的稳定性是个极为复杂的问题, 迄今没有明确的结论。目前, 仍有不少天文学家正从理论和数值等各方面深入地研究这个问题。

§ 18.9 人造地球卫星的摄动运动

自 1957 年苏联发射第一颗人造地球卫星以来, 人类进入了宇宙航行时代; 人造地球卫星运动规律的研究也成为天体力学的一个新分支, 提出了许多新课题。人造地球卫星运动理论已成为发展空间事业的基础理论之一。本节简单介绍这方面的知识, 详细内容可参阅刘林等编著的《人造地球卫星运动理论》(科学出版社, 1974 年)。

一、人造地球卫星所受的摄动因素

人造地球卫星在运动中主要受四种摄动因素的作用:

1. 地球的非球形摄动 地球并不是一个正球体, 较好的近似是将地球视为一个旋转椭球体。在第十七章中已经讨论了一个质量旋转对称分布的旋转椭球体地球对外面一质点的吸引问题,

并且导出了地球的非球形摄动所产生的力函数 (17.28) 式。如果将此力函数改用地心球坐标表示, 则椭球形地球对外面一单位质点吸引所产生的势函数可表示为

$$U = \frac{GE}{r} + \frac{JGE}{2r^3} R^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) + \text{高阶项}. \quad (18.86)$$

其中 G 为万有引力常数, E 为地球质量, R 为地球半径, r 为地心到外面一质点的距离, ϕ 为质点的地理纬度, J 为地球扁率系数, 约为 10^{-3} , 可视为一阶小量, 它与地球的形状、大小有关。(18.86) 式中的第二项是地球非球形摄动的一阶项或称主要项, 这种摄动项称为地球扁率摄动。

由于地球的非球形摄动使卫星不再沿一个固定的椭圆运动, 卫星的轨道平面不断地绕地轴进动, 同时卫星的椭圆轨道也在轨道面内不停地旋转。轨道转动的速度与地球的扁率, 卫星的轨道倾角和轨道大小有关。

地球的非球形摄动也可能引起卫星轨道的长期变化, 随着卫星飞行时间的增长, 轨道面的转速逐渐变小。也可能引起周期摄动, 这些摄动使得卫星在椭圆轨道上作小振幅的周期振动。

在更精确的情况下, 可以将地球作为三轴椭球体, 或一般的密度分布不均匀的非对称体。这时, 其摄动函数形式更为复杂。

2. 地球的大气阻力摄动 人造卫星在飞行过程中, 不断受地球浓密大气层的阻尼作用。§ 18.4 中已指出, 大气阻力是沿着与卫星运动方向相反的方向作用的。在人造卫星运动中, 大气阻力所产生的加速度为

$$F = -\frac{C_D S \rho}{2m} v^2. \quad (18.87)$$

其中 m 为卫星质量, S 是卫星在与它运动方向相垂直方向上的横截面积, ρ 为大气密度, C_D 为与卫星形状有关的阻尼系数, v 为

卫星相对于地球大气的运动速度，负号表示阻力加速度方向与卫星运动速度方向相反。

大气阻力摄动主要是改变卫星轨道的形状和大小，对卫星轨道面在空间的位置没有影响。§18.4 中已证明，由于大气阻力的存在可使卫星轨道半长径逐渐减小，以至陨落。通常大气阻力摄动对近地卫星而言尤为显著，它是决定卫星寿命的主要因素。

3. 太阳光压力摄动 沿着太阳到卫星的方向，它近似可以用太阳到地心方向来代替，它对卫星产生的摄动加速度一般可表为

$$F = -\frac{S S_0}{60 m c}$$

其中 m 是卫星的质量， S 是与太阳光线相垂直的横截面积， R 是反射系数， S_0 是太阳常数， c 是光束。

太阳光压力只可能使卫星轨道产生周期摄动。但是由于地影的存在，使卫星所受的太阳光压力是间断而不对称的，这就可能导致卫星的能量和轨道半长径发生较大的变化。因此，对于面积和质量之比较大的卫星，如气球卫星等，太阳光压力摄动对卫星轨道运动会起很大的影响。

4. 日、月引力摄动 日、月对人造卫星的吸引力引起的摄动相当于第三体摄动，它完全可按前面所述的三体问题摄动运动方程求解法来进行类似的讨论。这种摄动作用对近地卫星而言影响较小，但卫星飞行高度越高、这种摄动作用就越明显。日、月摄动可以引起卫星轨道产生长期摄动和长周期摄动，包括近于通约的摄动项。

二、人造地球卫星运动的理论和应用

目前，对人造卫星运动规律的研究，大多仍沿用经典天体力

学中的分析方法。其摄动运动方程的解表示为以地球扁率因子或大气阻力系数因子为小量的级数展开式。按照小参数的幂次，其摄动解也可分为一阶，二阶，三阶……，相应地形成了一阶运动理论，二阶运动理论……。然而，由于人造卫星的运动速度快，运转周期短，长期摄动的影响非常明显。因此，人造卫星的一阶运动理论中除包括一阶摄动外，还应含有二阶长期摄动。类似地，二阶运动理论是讨论二阶周期摄动和三阶长期摄动，高阶理论可依此类推。

人造卫星的一阶运动理论都是采用分析方法来研究，二阶运动理论中，分析方法主要用于讨论地球的非球形摄动，其公式相当繁复。至于三阶以上的运动理论中采用分析方法得出的公式更加繁复冗长，不便于实际应用。因此，在实用上，对于二阶以上的问题可采用计算机推导公式来减轻工作量或者直接采用数值方法求解人造地球卫星的摄动运动轨道。为了充分利用分析方法和数值方法的优点，在实际计算中有时采用分析和数值相结合的半分析半数值方法。

人造地球卫星的出现和发展为宇宙航行和空间探索事业开辟了广阔的前景。同时，它也具有极大的实用价值和理论意义。利用人造卫星运动特征设计的太阳同步轨道，成功地用于气象卫星，地球资源卫星，保证卫星照相得到有利的日照条件。利用人造卫星可以精密测定各测站的地心坐标，地球引力场的特性、高层大气密度和大气活动情况并成功地用于航海、航空导航和测定地极的移动等等。利用与地球自转同步的卫星可以作为微波信号的接收和转播站，用来作为电视中转系统。从理论上讲，对人造卫星摄动运动规律的研究，大大丰富了天体力学摄动理论的内容，许多具有实用价值的研究人造卫星运动的方法和理论的提出大大推动了天体力学的发展。

§ 18.10 月球火箭与行星际 飞行器的摄动运动

一、月球火箭运动理论

1969年7月20日美国国家航空和航天局发射的“阿波罗(Apollo)”11号登月舱第一次实现了人类登上月球的理想,把人类探测月球,征服月球的计划推向了高潮。至今,考察月球及其周围的自然条件,研究月球火箭的发射和运动理论,已成为空间科学和天体力学的一个交叉课题。

月球火箭沿着偏心率接近于1的椭圆轨道或双曲线轨道飞行于地、月之间,有时可能就在月球近旁掠过。在地球附近它主要受地球引力场的影响,而在月球附近月球的引力对火箭的运动有很大的影响,甚至可能倒转火箭运行的方向。因此,在讨论月球火箭运动时,常利用§16.8所定义的引力作用范围(16.92)式。对于地月系统而言,月球的引力作用范围为 6.6×10^7 米。火箭在此范围内飞行时,可以认为只受月球引力的作用。它的轨道是以月心为焦点的圆锥曲线。反之,当火箭在此范围外飞行时,只需考虑地球的吸引,它的轨道是以地心为焦点的圆锥曲线。利用这种分段方法可以全面地研究月球火箭的运动轨道,从而获得许多重要的定性结果。但是,在月球火箭的运动研究中尚未找出较好的分析解法通常是采用数值和定性相结合的方法来求解运动轨道。

目前在月球火箭运动理论中,主要的内容有:

1. 击中月球的轨道 从地面发射火箭,为使其击中月球必须设计适当的轨道。击中月球的火箭相对于地球的轨道可以是椭圆、抛物线和双曲线。但只有椭圆轨道既可以使火箭在到达远地

点前从正面击中月球，也可以使火箭在过远地点后绕到月球背面去击中它。抛物线轨道和双曲线轨道则只能从正面击中月球。在这三类轨道中，椭圆型轨道的稳定性最差，特别是那些从背面击中月球的轨道很不稳定。抛物线型轨道的稳定性最高，为保证沿抛物线型轨道飞行的火箭能击中月球，其初始速度的最大允许误差为 50 米/秒，发射方向的最大误差为 0.3° 。

运用引力作用范围的概念可求出击中月球火箭轨道的初始发射条件。虽然并没有计入月球的引力，但按此概念所得的结果与实际情况偏离不大，而且这种偏差将随着初始速度的增大而迅速减小。研究表明，为了节省能量，火箭进入轨道时的地心方向与火箭到达月球时的地心方向两者之间的夹角越大越好，例如，对于北半球的发射场来说，在发射时月球最好位于南半球的上空，还应使火箭到达月球时能从发射场观测到。因此，火箭飞行的时间应是一天半，两天半或三天半左右。而火箭飞行到月面的时间与初始速度直接有关。初速越大，飞行时间越短，比较理想的飞行时间是一天半左右。

2. 绕月球飞行的轨道 这种轨道是指火箭离开月球区域后能立即返回地球区域的轨道，火箭通过这种轨道将探测资料发回地球。这类轨道，主要研究火箭在月球和地球附近的运动性质，更多的是研究火箭的月心轨道。在月球附近，火箭相对月心的速度要比月球抛物线速度大一倍以上，火箭相对于月球的运动总是双曲线型的。火箭的月心轨道按运动方向可分为顺行和逆行两种。逆行轨道绕到月球背面，近月点也在月球背面，故又称绕行轨道；顺行轨道则达不到月球背面，故又称非绕行轨道。绕行轨道的飞行时间较短，一般为 5~10 天；非绕行轨道的飞行时间较长，约 15~20 天。此外，还有人用平面圆型限制性三体问题为力学模型研究绕月飞行的对称轨道，得出了一些很重要的结论。

3. 绕地-月飞行的周期轨道 探讨绕地-月飞行的对称周期轨道常用平面圆型限制性三体问题作为力学模型。事实上, 只有那些近月距和近地距都不大的周期轨道对考察月球有实际意义。已故的美籍华裔天文学家黄授书的研究表明: 火箭运动周期分别为 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{6}{12}$ 个月的 14 种通约型轨道对探测月球是有效的。它们的近月距都小于 8 万千米, 而近地距又在 16 万千米以内。由于月球轨道不是正圆。因此, 理想的绕地-月飞行周期轨道是很难实现的。但是, 由于月球轨道偏心率很小, 火箭的真实轨道与理想设计轨道之间的偏差也很小, 基本上符合实用要求。例如, 苏联发射的第三枚火箭的轨道就是按这些理想模型设计的。

4. 月球卫星的轨道 研究月球卫星围绕着月球运动的轨道, 此外还讨论在地面上发射的火箭需进入何种特定轨道, 才能使其飞行到月球附近时被月球俘获而成为一颗月球的卫星。由于俘获现象在地-月系统中即使存在, 其可能性也是极小的, 而且地球引力对月球卫星的摄动相当大, 它是破坏月球卫星稳定性的主要因素。因此, 这种轨道的实现相当困难, 必须加以许多人为的辅助动力才能使发射月球卫星成为可能。

5. 月球引力的利用 当火箭在月球附近飞行时, 月球引力摄动很大, 它可以使火箭进入某些从地面无法预先设计的轨道, 也可以使火箭作为行星际航行的中途加速器。因此, 如何利用月球引力进行月球火箭的轨道设计和轨道改进是一个实用意义很大的课题。

二、行星际飞行器运动理论

行星际飞行器是指在行星际空间飞行的人造天体, 包括飞向

和绕过行星的飞船，击中行星的火箭和行星的人造卫星等等。行星际飞行器的运动常常作为地球、太阳和其他行星的引力作用下的限制性多体问题来处理。类似于月球火箭的运动理论，行星际飞行器的轨道也可以利用作用范围的概念而划分为几个二体问题轨道。它的运动可分为三个阶段：

1. 在地球引力作用范围内的运动 这一阶段主要研究飞行器相对于地心的运动，它除了受地球引力作用外，还要考虑地球非球形，大气阻力及日月引力等摄动因素。这一阶段飞行时间很短，飞行器运动的轨道接近于双曲线。

2. 过渡阶段的运动 飞行器脱离地球引力作用范围后到进入目标行星的作用范围前的轨道运动阶段称为过渡阶段。这一阶段飞行时间最长，是运动的主要阶段。此时主要讨论飞行器在太阳引力作用下的运动，有时还需考虑某些行星的摄动作用，但是飞行器相对于太阳的运动轨道基本上是一个椭圆。

3. 在目标行星引力作用范围内的运动 在这一阶段飞行器主要受目标行星的引力作用，也要计及太阳的摄动作用。飞行器相对于目标行星的轨道接近于双曲线。

有些飞行器可以同时飞往几个行星，此时，上述的三个阶段在飞往各个行星的旅途中都要重复一次。对于有些需要回归的行星际飞行器，它们的返回轨道也要经历以上的几个阶段，只是次序与飞行时的次序相反。

行星际飞行器在过渡阶段的运动是三个阶段中最重要的研究对象。这一阶段的轨道设计要着重考虑节省能量，节省飞行时间等原则。在 § 16.9 中已经证明向大行星发射火箭最节省能量的轨道是双切轨道，又称为霍曼轨道。这种轨道由于充分利用地球或目标行星的公转速度而使所耗费的能量减小，但是利用霍曼轨道作为过渡轨道必须走完椭圆轨道的一半至远地点处才能到达目标

行星，这就使得飞行时间很长。要想缩短飞行时间，必须增大初始的发射速度，使初速接近于双曲型轨道所需要的初始速度。在通常情况下利用抛物线轨道或双曲型轨道作为过渡轨道要比椭圆轨道有利，尤其是双曲型轨道可兼顾省燃料省时间的两条原则，目前发射的行星际飞行器大都采用双曲型轨道。

严格来说，行星的轨道都不是圆，也不在同一平面内运动，而且飞行器在运行过程中除受太阳引力和各种已知的摄动因素外还要受各种偶然摄动因素的影响。因此平面圆型限制性问题只能作为一个定性讨论的近似模型，许多实际的飞行器运动理论还只能采用数值方法来直接计算。

§ 18.11 地球自转的运动方程

在天体力学中除了讨论天体质量中心在空间的轨道运动外，还有一个重要的内容是讨论天体绕自己质量中心的自转运动。在太阳系的天体中，地球的自转运动讨论得最详细。本节和下节简单介绍地球自转的运动方程和解的结果。

一、欧拉角

在讨论地球自转运动时，把地球视为刚体。为了表示刚体地球在空间的位置。首先建立地球的中心惯性主轴坐标系：设地球的质量中心为 O ，三条惯性主轴为 OA ， OB ， OC 。旋转的地球相对于这三条轴的转动惯量为 A ， B ， C 。并设 $A < B < C$ 。以 O 为原点， OA ， OB ， OC 三轴为坐标轴就组成中心惯性主轴坐标系 $O-ABC$ 。 OC 轴与地球自转轴相差很小，称为形状轴， OC 轴指向北极为正，它与地面的交点称为地球的形状极。 OA ， OB 所在的平面称为形状赤道面， OA ， OB ， OC 三轴成右手正交系。

由于地球为刚体, $O-ABC$ 系在地球体内的相对位置是固定的, 因此, 要研究地球在空间的位置和运动只需研究 $O-ABC$ 系相对于空间某一惯性坐标系的位置和运动。

现在, 以地球质量中心 O 为中心作地心天球, 并建立惯性直角坐标系 $O-XYZ$ (见图 18.6)。其中, Z 轴指向某固定历元的北黄极, 大圆 XY 为同一历元时刻的

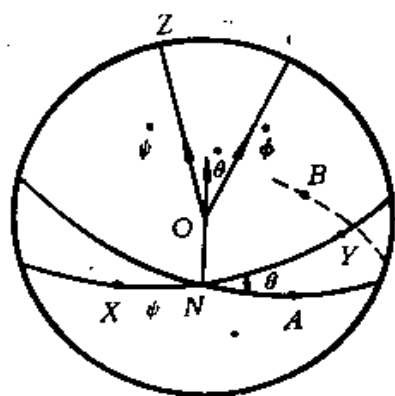


图 18.6 欧拉角的定义

黄极, 大圆 XY 为同一历元时刻的
黄道, X 轴指向此时刻的春分点。 A ,
 B , C 三点分别为 OA , OB , OC 三
轴在天球上的投影, N 为形状赤道面
与黄道面的升交点。若定义: θ 角为
固定的黄道与形状赤道之间的交角,
它相当于 XY 平面绕 ON 轴顺时针
旋转到 AB 平面所转过的角度, Z 和

C 为两平面相应的极, 故有 $\theta = \widehat{ZC}$ 。 ψ 角为在固定黄道上由 X 点(即历元时刻的春分点)按逆时针方向度量至 N 点的弧长, 即升交点黄径。 ϕ 角为在形状赤道上由 N 点按逆时针方向度量到 A 点的弧长。

θ, ψ, ϕ 三个角确定了地球中心惯性主轴坐标系相对于空间惯性坐标系 $O-XYZ$ 的位置和地球在空间的定向。 θ, ψ, ϕ 称为欧拉角, 它首先是由欧拉(L. Euler)在研究刚体转动时提出的。显然, 只要研究三个欧拉角的变化规律就可以得出地球自转运动的规律。

二、地球自转的运动学方程

由于 $O-ABC$ 系随着地球一起自转, 故三个欧拉角 θ, ψ, ϕ 也将随着变化, 而地球自转运动的角速度也应该可以因 θ, ψ, ϕ 的变化来表示。

设在任一时刻 t , 地球的自转角速度为 ω , 它在固定在地球上

的旋转坐标系 $O-ABC$ 上的三个分量为 p, q, r 。矢量 ω 所指的方向就是 t 时刻的瞬时自转轴。若瞬时自转轴在 $O-ABC$ 三个轴上的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ，则有

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{p}{\omega}, \quad \cos \beta = \frac{q}{\omega}, \quad \cos \gamma = \frac{r}{\omega}, \\ \omega &= \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.88)$$

由此可知，当要讨论地球相对于空间惯性坐标系的转动情况时，可以用 θ, ψ, ϕ 作为变量，它们的速率 $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}$ 决定了地球在任一瞬时的运动。当要讨论地球自转轴相对于 $O-ABC$ 系的运动时，可以用 p, q, r 作为变量，它们决定了地球瞬时自转轴在地球本体内部的位置和瞬时自转角速度的大小。

$(\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi})$ 和 (p, q, r) 都是转动角速度的分量，它们分别绕一定的轴转动。如图 18.6 所示，地球绕 OA, OB, OC 三个轴旋转的速率为 p, q, r 。若以逆时针转动为正方向，则地球绕与 ON 轴方向转动的速率为 $-\dot{\theta}$ ，绕 OZ 轴旋转的速率为 $\dot{\psi}$ ，绕 OC 轴旋转的速率为 $\dot{\phi}$ 。利用这些旋转轴之间的投影关系，可得出地球自转角速度分量 (p, q, r) 与欧拉角的变化速率 $(\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi})$ 之间的关系：

$$\left. \begin{aligned} p &= -\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi, \\ q &= \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi, \\ r &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (18.89)$$

反之，亦可得

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta \dot{\psi} &= -p \sin \phi - q \cos \phi, \\ \dot{\theta} &= -p \cos \phi + q \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= r - \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (18.90)$$

(18.89) 或 (18.90) 式就是地球自转的运动学方程。

三、欧拉动力学方程

在 § 17.2 中已经得出了地球对外面一质点吸引产生的力函数 U 的表达式为

$$U = GM \left(\frac{E}{\rho} + \frac{B+C-2A}{2\rho^3} + \frac{3(A-B)y^2-3(C-A)z^2}{2\rho^5} \right). \quad (18.91)$$

根据刚体力学中定点转动的原理，在中心惯性主轴坐标系内地球的转动动能可表为

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad (18.92)$$

由 (18.91) 和 (18.92) 两式，再利用分析力学中的拉格朗日方程①，可得

$$\left. \begin{aligned} Ap - (B-C)qr &= \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial U}{\partial \phi} - \frac{\partial U}{\partial \psi} \right) - \cos \phi \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ Bq - (C-A)rp &= \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial U}{\partial \phi} - \frac{\partial U}{\partial \psi} \right) + \sin \phi \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ Cr - (A-B)pq &= \frac{\partial U}{\partial \phi}. \end{aligned} \right\} \quad (18.93)$$

(18.93) 式就是著名的欧拉动力学方程，这个方程的左端变量为 p, q, r ，右端变量为欧拉角 θ, ψ, ϕ 。由于同一方程中包含了两组变量，因此上式的求解必须与上面所得的运动学方程 (18.89) 式或 (18.90) 式联立起来才能进行。一般在讨论地球的惯性运动时，常以 p, q, r 为变量，而在讨论地球在空间的运动（岁差章动现象）时需用 θ, ψ, ϕ 作变量。

针对地、日、月系统的具体情况，对力函数 (18.91) 式作一定

① 参阅梁昆淼编《力学》下册，人民教育出版社，1980

简化后, 可用分析力学方法推出适合于讨论岁差章动问题的基本公式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= -\frac{1}{Cr \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{Cr \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (18.94)$$

(18.94)式称为岁差章动基本方程。

§ 18.12 地极移动和岁差章动

现在来讨论欧拉动力学方程和岁差章动基本方程的解, 以得出地球自转轴相对于地球本体内部和空间惯性参考系的变化规律和定性结果。

一、地球的惯性运动

1. 欧拉方程的解 为讨论地球自转轴在地球内的变化, 可以利用欧拉动力学方程(18.93)式解出地球自转角速度在 $O-ABC$ 系中的三个分量 p, q, r 随时间的变化规律, 从而也可得到地球自转轴随时间的变化及在地球本体内的轨迹。为此, 可以先对(18.93)式再进行一些简化。

首先来分析一下外力对地球吸引产生的力函数与地球转动动能的大小。考察力函数(18.91)式可知, 式中的前两项都与欧拉角无关, 代入欧拉方程后不起作用, 可以略去。又假设刚体地球为旋转椭球体, 有 $A=B$, 故力函数中含 y 的项为零。据此, 若同时考虑日、月影响, 可把力函数简化为

$$U = -\frac{3(C-A)}{2} \left(GM \frac{z^2}{\rho^5} + GS \frac{z_1^2}{\rho_1^5} \right).$$

其中 S, M 为日、月质量, ρ_1, ρ 为日、月的地心距, z_1, z 为日、月相对于地心的赤道直角坐标。将相应的值代入上式可得出日、月吸引产生的力函数 U 与地球自转动能之比

$$\frac{|U|}{T} < 1.5 \times 10^{-7}.$$

可见, 在讨论地球自转轴在本体内的变化时, 可以忽略日、月等外力的影响而将地球视为作惯性运动。因此, 欧拉方程简化为

$$\left. \begin{aligned} A\dot{p} - (A-C)qr &= 0, \\ A\dot{q} - (C-A)pr &= 0, \\ C\dot{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.95)$$

由(18.95)第三式立即解得

$$r = \omega_0 (\text{常数}), \quad (18.96)$$

令 $\mu = \frac{C-A}{A} \omega_0$, 代入(18.95)的前两式可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} + \mu q &= 0, \\ \dot{q} - \mu p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.97)$$

此为谐振动方程。不难求得解为

$$\left. \begin{aligned} p &= \alpha \cos(\mu t - \beta), \\ q &= \alpha \sin(\mu t - \beta). \end{aligned} \right\} \quad (18.98)$$

其中 α, β 为积分常数, 它们与 ω_0 一起组成(18.95)式的三个独立的积分常数。而地球自转角速度 ω 的大小为

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} = \text{常数}. \quad (18.99)$$

(18.98) 式表明在旋转椭球模型的假设条件下, 如果忽略外力的影响, 地球自转可视为均匀的, 自转角速度的大小可作为时间计量的标准。但在精确的情况下, 考虑地球为弹性体, 则可以发现 ω 不是常数, 有长期变化, 地球自转周期每一百年约增加千分之一秒, 此外还有周期变化和不规则变化。

2. 地极移动 根据(18.98)式, 令 $\sigma = \frac{\alpha}{\omega_0}$, 则有

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \sigma^2}$$

对地球的长期观测表明, σ^2 是一个极小的量(约为 10^{-12} 数量级), ω 与 ω_0 相差很小。

由于 p, q, r 是 ω 在 $O-ABC$ 系中的三个分量, 因此地球瞬时自转轴在 $O-ABC$ 系中的方程可写为

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

将(18.96)式和(18.98)式代入上式可得

$$\begin{aligned} \text{或} \quad \frac{x}{\alpha \cos(\mu t - \beta)} &= \frac{y}{\alpha \sin(\mu t - \beta)} = \frac{z}{\omega_0} \\ \frac{x}{\sigma \cos(\mu t - \beta)} &= \frac{y}{\sigma \sin(\mu t - \beta)} = \frac{z}{1} \end{aligned} \quad (18.100)$$

由于瞬时自转轴与 OC 轴相差很小(不超过 $0.5''$)。设 P 点为瞬时自转轴与地面的交点, 也可看作是瞬时自转轴与 $z=1$ 的平面的交点。 P_0 为 OC 轴与地面的交点, 因此 P 就在 P_0 点的附近。 P 点的坐标为

$$x = \sigma \cos(\mu t - \beta), \quad y = \sigma \sin(\mu t - \beta), \quad z = 1. \quad (18.101)$$

上式表明, P 点在 $z=1$ 的平面上绕 P_0 点作圆周运动, 圆半径为 σ , 运动周期为

$$\frac{2\pi}{\mu} = \frac{A}{C-A} \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (18.102)$$

在上式中 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 接近于一个恒星日, $\frac{A}{C-A} \approx 303$, 故 P 点绕 P_0 运动的周期为 303 个恒星日(大约 302 平太阳日), 称为欧拉周期。 σ 的数值大约相当于 15 米左右。综上所述, 刚体地球的瞬时自转轴与地面的交点 P (称为瞬时极) 绕着形状极 P_0 作半径为 15 米,

周期约为 303 恒星日的圆周运动，这就是通常所说的地极移动。

事实上，地球不是严格的刚体，现在较好的地球模型认为地球是由液核、地幔和地壳组成，不仅液核部分有形变，固体部分也有形状变化，因此 P_0 不是固定不变的。实际观测表明，地极移动是极其复杂的，不是刚体地球模型所给出的规则圆运动，而是由许多规则变化和不规则变化交织而成，主要的两种周期变化是周期为 432 天左右，振幅为 $0.2''$ 的钱德勒周期振动和振幅不到 $0.1''$ 的周年变化。

二、岁差章动原理

现在来考虑在日、月等外力因素作用下地球瞬时自转轴相对于空间惯性坐标系 $O-XYZ$ 的变化而产生的一种重要现象——岁差章动。

此时，选择欧拉角 θ, ψ, ϕ 作为变量讨论岁差章动基本方程的解。

1. 力函数的形式转换 为了讨论岁差章动方程的解，必须首先将力函数 U 表示为欧拉角 ψ, θ 和时间 t 的显函数。

前面已说明，力函数 U 可简化为

$$U = -\frac{3(C-A)}{2} \left(GM \frac{z^2}{\rho^5} + GS \frac{z_1^2}{\rho_1^5} \right).$$

现在将 U 作一些转换，按开普勒第三定律近似地有

$$GS = n_1^2 a_1^3$$

n_1, a_1 分别为地球的平均运动角速度和轨道半长径，代入上式，化成

$$U = -\frac{3}{2} (C-A) n_1^2 \left[\left(\frac{z_1}{\rho_1} \right)^2 \left(\frac{a_1}{\rho_1} \right)^3 + \frac{M}{S} \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \left(\frac{a}{\rho} \right)^3 \left(\frac{a_1}{a} \right)^3 \right].$$

定义 K, L 为

$$K = \frac{3}{2} (C - A) \frac{n_1^2}{C\omega}$$

$$L = \frac{M}{S} \left(\frac{a_1}{a} \right)^3$$

则

$$-\frac{U}{C\omega} = K \left[L \left(\frac{a}{\rho} \right)^3 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{z_1}{\rho_1} \right)^2 \left(\frac{a_1}{\rho_1} \right)^3 \right]. \quad (18.103)$$

从图 18.6 可看出, $O-ABC$ 与 $O-XYZ$ 系之间可以用欧拉角来进行转换, 设 (l_3, m_3, n_3) 为 OC 轴相对于 $O-XYZ$ 系的方向余弦, 利用球面三角关系容易得出

$$\left. \begin{aligned} l_3 &= \cos CX = -\sin \theta \sin \psi, \\ m_3 &= \cos CY = \sin \theta \cos \psi, \\ n_3 &= \cos CZ = \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (18.104)$$

如果月球或太阳对 $O-ABC$ 系的坐标为 (X, Y, Z) , 对 $O-XYZ$ 系的坐标为 (ξ, η, ζ) , 则有

$$\begin{aligned} z &= l_3 \xi + m_3 \eta + n_3 \zeta \\ &= -\xi \sin \theta \sin \psi + \eta \sin \theta \cos \psi + \zeta \cos \theta. \end{aligned} \quad (18.105)$$

同理

$$z_1 = -\xi_1 \sin \theta \sin \psi + \eta_1 \sin \theta \cos \psi + \zeta_1 \cos \theta. \quad (18.106)$$

将(18.105)式和(18.106)式代入(18.103)式就可将力函数 U 展开为欧拉角的函数。

将 U 展开为时间 t 的显函数, 主要是展开 $\left(\frac{a}{\rho}\right)^3$ 和 $\left(\frac{z}{\rho}\right)^2$ (对太阳的 $\left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^2$ 和 $\left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^3$ 也可类似推导)。如图 18.7 所示, 以地球质量中心 O 为天球中心, $O-X_0 Y_0 Z_0$ 为历元 t_0 时的地心黄道直角坐标系。大圆 ACE 为任一瞬时 t 的黄道, K 为大圆的极, i 为 t 时黄道对 t_0 时黄道的交角。大圆 BCM 为 t 时月球轨道, M 为 t 时月球位置, C 为月球轨道对 t 时黄道的升交点, c_1 为月

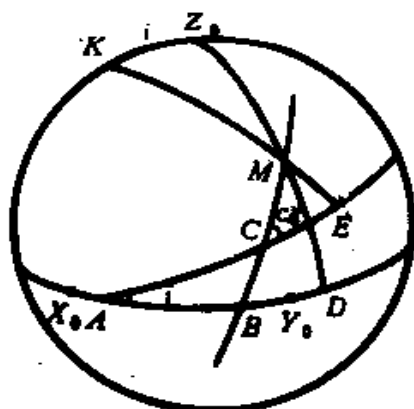


图 18.7 力函数的展开

球轨道与黄道的交角(约 $5^{\circ}8'$)。 $\left(\frac{z}{\rho}\right)^2, \left(\frac{a}{\rho}\right)^3$ 的展开需用二体问题的级数展开关系, 月球的坐标与轨道根数的关系以及 (18.105) 式等等, 这里只给出结果:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 = & \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}S^2\right) \sin^2 \theta \\ & + S \left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}S^2\right) \sin \theta \cos \theta \cos(N + \psi) \\ & - \frac{1}{4}S^2 \sin^2 \theta \cos(2N + 2\psi) \\ & + i \sin \theta \cos \theta \cos(Q + \psi) + \frac{3}{2}e \sin^2 \theta \cos M \\ & - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos(2M + 2\bar{\omega} + 2\psi) + \dots \quad (18.107) \end{aligned}$$

其中 $S = \sin c_1$, $N = X_0 A + AC = Q + AC$, M 为月球平近点角。 $\bar{\omega}$ 为月球近地点平经。

上述结果, 对太阳的情况也照样适用, 只是 $S = \sin c_1 = 0$, 用 M_1 , $\bar{\omega}_1$, e_1 代替上式中的 M , $\bar{\omega}$, e , 则 $\left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^3 \left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^2$ 式和 (18.107) 式完全相同。最终可得力函数 U 的展开式为

$$\begin{aligned}
-\frac{U}{C\omega} &= K \left[L \left(\frac{a}{\rho} \right)^3 \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{\rho_1} \right)^3 \left(\frac{z_1}{\rho_1} \right)^2 \right] \\
&= K \left\{ \left[L \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} S^2 \right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_1^2 \right] \sin^2 \theta \right. \\
&\quad + LS \left(1 - \frac{1}{2} S^2 + \frac{3}{2} e^2 \right) \sin \theta \cos \theta \cos(N + \psi) \\
&\quad - \frac{1}{4} LS^2 \sin^2 \theta \cos(2N + 2\psi) \\
&\quad - \frac{1}{2} [L \cos(2M + 2\bar{\omega} + 2\psi) \\
&\quad + \cos(2M_1 + 2\bar{\omega}_1 + 2\psi)] \sin^2 \theta \\
&\quad + i(L+1) \cos(\psi + \Omega) \sin \theta \cos \theta \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} (Le \cos M + e_1 \cos M_1) \sin^2 \theta + \dots \right\} \quad (18.108)
\end{aligned}$$

其中 N , e , S , $\bar{\omega}$ 等都是月球的轨道根数, 相对于地球的根数而言, 它们的变化较快, 可看成是时间 t 的周期函数。这些项内起主要作用的是月球的升交点经度 N , 它的变化周期为 18.6 年, 它在 18.6 年内约减少 2π 。而地球的轨道根数 $\bar{\omega}_1$, e_1 等的变化很小, 在几千年内都可以看作长期变化。根据地球轨道运动理论, 在其他行星摄动下, 地球的有关根数可写为

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_0 + e't, \\ i \sin \Omega &= gt + ht^2, \\ i \cos \Omega &= g_1 t + h_1 t^2. \end{aligned} \right\} \quad (18.109)$$

其中 e' , g , g_1 , h_1 , h 都为非常小的量。如果略去 e'^2 , h , h_1 的项, 则得

$$\begin{aligned} i \cos(\psi + \Omega) &= \cos \psi (i \cos \Omega) - \sin \psi (i \sin \Omega) \\ &= (g_1 \cos \psi - g \sin \psi) t, \end{aligned} \quad (18.110)$$

$$e_1^2 = e_0^2 + 2e_0 e' t, \quad (18.111)$$

将 (18.109) - (18.111) 三式代入 (18.108) 式, 并将长期项和周期

项分开, 则有

$$-\frac{U}{C\omega} = F \sin^2 \theta + [G(g_1 \cos \psi - g \sin \psi) \sin \theta \cos \theta + H \sin^2 \theta] t + V \quad (18.112)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F &= K \left[L \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} S^2 \right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_1^2 \right], \\ G &= K(L+1), \\ H &= \frac{3}{2} K e_1 e' \end{aligned} \right\} \quad (18.113)$$

而 $V = V(\theta, \psi, N, e, S, \tilde{\omega}, M, e_1, \tilde{\omega}_1, M_1)$ 中只含有周期项。

2. 岁差章动现象的力学解释

利用上面所得的力函数 U 就可求解岁差章动基本方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{1}{C\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{C\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (18.114)$$

将(18.112)式代入可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= 2F \cos \theta + \left[G(g_1 \cos \psi - g \sin \psi) \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} + 2H \cos \theta \right] t + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \\ \dot{\theta} &= G \cos \theta (g_1 \sin \psi + g \cos \psi) t - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (18.115)$$

方程式右端的长期部分和周期部分是分开的, 为此, 假设方程的形式解为

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_m + \delta \psi, \\ \theta &= \theta_m + \delta \theta. \end{aligned} \right\} \quad (18.116)$$

于是, 就可将(18.115)式的长期项和周期项分开为两组方程

$$\left. \begin{aligned} \psi_m &= 2F \cos \theta + \left[G(g_1 \cos \psi - g \sin \psi) \right. \\ &\quad \times \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} + 2H \cos \theta \Big] t, \\ \dot{\theta}_m &= G \cos \theta (g_1 \sin \psi + g \cos \psi) t. \end{aligned} \right\} \quad (18.117)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta_\psi}{dt} &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \\ \frac{d\delta_\theta}{dt} &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (18.118)$$

由实际观测知 ψ , θ 的变化很慢 (ψ 要 70 年左右才增加 1° , θ 是微小的周期变化, 振幅小于 $10''$), 若定义地心黄道坐标系 $O-X_0Y_0Z_0$ 的 X_0 轴指向初始 t_0 时刻的春分点 (见图 18.7), 此时 ψ_0 近似为零。因此 ψ 的变化极其缓慢, 且在 (18.117) 式中含 ψ 的项前的系数为小量 g , g_1 , 在近似的情况下, 可令

$$\sin \psi = 0, \quad \cos \psi = 1, \quad \theta = \theta_0.$$

由此 (18.117) 式可简化为

$$\left. \begin{aligned} \psi_m &= 2F \cos \theta_0 + \left(Gg_1 \frac{\cos 2\theta_0}{\sin \theta_0} + 2H \cos \theta_0 \right) t, \\ \dot{\theta}_m &= Gg \cos \theta_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (18.119)$$

积分后可得

$$\left. \begin{aligned} \psi_m &= \psi_0 + at + bt^2, \\ \theta_m &= \theta_0 + ct^2. \end{aligned} \right\} \quad (18.120)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a &= 2F \cos \theta_0, \\ b &= \frac{1}{2} \left(\frac{Gg_1 \cos 2\theta_0}{\sin \theta_0} + 2H \cos \theta_0 \right), \\ c &= \frac{1}{2} Gg \cos \theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (18.121)$$

同理, 若将力函数 U 的周期部分 V 的具体形式代入 (18.118) 式,

两边积分后就得出周期部分 δ_ψ , δ_θ 的表达式, 若仅列出主要项, 则其结果为

$$\left. \begin{aligned} \delta_\psi &= -D \sin(N + \psi) + \dots, \\ \delta_\theta &= E \cos(N + \psi) + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (18.122)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha D &= KLS \left(1 - \frac{1}{2} S^2 + \frac{3}{2} e^2 \right) \frac{\cos 2\theta_0}{\sin \theta_0}, \\ \alpha E &= KLS \left(1 - \frac{1}{2} S^2 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos \theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (18.123)$$

$$\alpha = 33.757146 \text{ 弧度/儒略世纪}$$

综合(18.120)式和(18.122)式可得岁差章动基本方程的解为

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_m + \delta_\psi = \psi_0 + at + bt^2 - D \sin(N + \psi) + \dots \\ \theta &= \theta_m + \delta_\theta = \theta_0 + ct^2 + E \cos(N + \psi) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (18.124)$$

(18.124)中的长期部分 ψ_m , θ_m 统称日月岁差, 系数 a 称为日月岁差常数, 这些项随着时间的增加而无限增长或减小。计算和观测的结果都表明, 当 t 增加时, ψ_m 减小即春分点不断西移, 这就使恒星年和回归年的长度不一样, 此称为岁差。 ψ_m 的值叫做黄经岁差, θ_m 的值叫做黄赤交角岁差。

另一部分是周期项, (18.122)式所给出的主要项的周期为 18.6 年 = 6798 天, 而且振幅又是最大。在中国古代 18.6 年的时间叫做一章, 故以这样的周期振动的现象叫做章动。章动的概念也推广应用于 δ_ψ , δ_θ 中的非主要项周期振动, 因此, 称 δ_ψ 为黄经章动, δ_θ 为黄赤交角章动。

如果只考虑岁差, 则任何时刻 t 时的天极、春分点和天赤道叫做平天极, 平春分点和平赤道。若加上章动改正后, 则相应的量分别叫做真天极, 真春分点和真赤道。同样, 天体所在的位置

也相应的有平位置和真位置之分。从(18.122)式可以看出，章动的主要项描绘出一个长短半径分别为 D 和 E 的椭圆，使得真天极围绕平天极作近似椭圆的周期振动，这个椭圆叫做章动椭圆。

以上所得的解是很近似的，在实际问题中岁差章动的计算当然要复杂得多。从观测上和理论上准确地定出岁差章动公式中的常数是天体测量学和天体力学的一个重要任务。

主要参考书目

- [11] 戴文赛主编,天文学教程(下册)。上海科学技术出版社,1962。
- [12] C. H. 勃拉日哥著,易照华等译,球面天文学教程。高等教育出版社,1954。
- [13] 苗永宽编著,球面天文学。科学出版社,1983。
- [14] 张承志,夏一飞编著,天体测量学。高等教育出版社,1986。
- [15] 吴守贤等编,时间测量。科学出版社,1983。
- [16] 李东明等编著,等高方法及其在基本天体测量中的应用。科学出版社,1983。
- [7] 紫金山天文台编,中国天文年历。科学出版社,1985。
- [8] 易照华等编著,天体力学引论。科学出版社,1978。
- [9] D. 布劳威尔, G. M. 克莱门斯著,林,丁华译,天体力学方法。科学出版社,1986。
- [10] J. 柯瓦列夫斯基著,黄坤仪译,天体力学引论。科学出版社,1984。
- [11] Brown, G. W. & Chook, C. A. Planetary Theory. Dover Publication Inc., 1964.
- [12] Fitzpatrick, P. M. Principles of Celestial Mechanics. Academic Press Inc., 1970.
- [13] Moulton, F. R. An Introduction to Celestial Mechanics. (Second Edition) Dover Publishing Inc., 1970.
- [14] Roy, A. E. Orbital Motion. (Second Edition) Adam Hilger Ltd., 1982.
- [15] Szebehely, V. Theory of Orbit-The Restricted Problem of Three Bodies. Academic Press Inc., 1967.
- [16] 赵进义编著,易照华修订,天体力学,上海科学技术出版社,1987。

人名索引

- 一行, (上册)45, 103
万户, (上册)225
尸佼, (上册)261
王充, (上册)188, 228
王锡阐, (上册)49
甘德, (上册)43
石申, (上册)43, 225; (下册)97
庄子, (上册)261
杨伟, (上册)45
苏颂, (上册)47, 80
李淳风, (上册)45
李善兰, (上册)49
何承天, (上册)45
沈括, (上册)47
张子信, (上册)45
张钰哲, (上册)42, 354, 366
张衡, (上册)44, 45, 225, 228, 341
张耒, (上册)49
柳宗元, (上册)45
姜岌, (下册)2
祖冲之, (上册)45, 103, 225
祖暅, (上册)45
郭守敬, (上册)47, 48, 49, 158, 225
席泽宗, (中册)91
徐光启, (上册)48
梅文鼎, (上册)49

梁令瓚, (上册)45
韩公廉, (上册)47, 80
虞喜, (上册)45; (下册)35
薛凤祚, (上册)49
薄树人, (中册)91
戴文赛, (上册)292, 398, 399, 400, 402

A

Abell, G. O. 阿贝尔, (中册)372, 382, 383
Abney, W. de W. 阿布内, (中册)49
Adams, J. C. 亚当斯, (上册)37, 265, 330, 489
Aitken, R. G. 艾特肯, (中册)148
Alfvén, H. 阿尔文, (上册)248, 298
Allen, C. W. 艾伦, (上册)295
Alpher, R. 阿尔弗, (中册)425, 427
Apollonius 阿波隆尼斯, (上册)259
Argelander, F. 阿格兰德, (中册)55, 56, 289
Aristarchus 阿利斯塔克, (上册)32, 190, 262
Aristotle 亚里斯多德, (上册)32, 166, 228, 259, 262, 355, 373
Arp, H. 阿普, (中册)411, 412
Augustus 奥古斯都, (上册)101
Auman, H. H. 奥曼, (中册)329
Auwers, A. 奥韦斯, (下册)98

B

Baade, W. 巴德, (中册)84, 124, 309, 310, 317
Babcock, H. W. 巴布科克, (上册)457; (中册)75, 76
Barbier, J. 巴比内特, (上册)399
Bayer, J. 巴耶, (上册)503
Becklin, E. E. 贝克林, (中册)250, 329
Bell, S. J. 贝尔, (上册)490; (中册)127, 140

Bessel, F. W. 贝塞耳, (上册)37, 265, 364, 489; (中册)4, 5, 116; (下册)6, 97
 Bethe, H. A. 贝特, (上册)413, 489
 Bevis, J. 比维斯, (中册)110
 Bickerton, A. W. 比克顿, (上册)399
 Biela, W. 比拉, (上册)369
 Blaauw, A. 布劳乌, (中册)208
 Blake, L. 布莱克, (上册)150
 Blitz, L. 布利茨, (中册)304
 Bode, J. E. 波得, (上册)279, 337
 Bondi, H. 邦迪, (中册)427
 Boss, B. 本杰明·波斯, (下册)98
 Boss, L. 刘易斯·波斯, (中册)199, (下册)98
 Bowen, I. S. 鲍恩, (中册)216
 Bradley, J. 布拉德雷, (上册)35, 265, 488; (下册)6, 22
 Brahe, Tycho 第谷·布拉赫, (上册)35, 49, 158, 265, 282, 355; (中册)103; (下册)147
 Brorsen, T. 勃罗森, (上册)397
 Bruno, G. 布鲁诺, (上册)265
 Buffon, G. L. L. 布丰, (上册)398
 Bunsen, R. W. 本生, (上册)423
 Burbidge, E. M. 伯比奇, (中册)269
 Burbidge, G. R. 伯比奇, (中册)269
 Burnham, S. W. 伯恩汉, (中册)148

C

Cameron, A. G. W. 卡梅伦, (上册)250, 398
 Carrington, R. C. 卡林顿, (上册)447, 515
 Carswell, R. F. 卡斯韦尔, (中册)416
 Cassini, G. D. 乔·卡西尼, (上册)36, 265, 346, 395, 407
 Chambers, G. F. 钱伯斯, (中册)55
 Chandler, S. C. 钱德勒, (下册)113

Chandrasekhar, S. 钱德拉塞卡, (上册)489, (中册)121
 Clark, A. 克拉克, (中册)116
 Clausius, R. 克劳修斯, (中册)379
 Columbus, C. 哥伦布, (上册)4
 Copernicus, N. 哥白尼, (上册)4, 7, 16, 34, 37, 158, 262, 264, 265, 355, (中册)4, 276
 Curtis, H. D. 柯蒂斯, (中册)337, 338

D

Danjon, A.-L. 丹戎, (上册)160
 Darwin, C. 查·达尔文, (上册)388
 Darwin, G. H. 乔治·达尔文, (上册)247
 De Gasparis, A. 德加斯帕里, (上册)388
 Democritus 德谟克里特, (上册)262; (中册)421
 Descartes R. 笛卡尔, (上册)397
 Dicke, R. 迪克, (中册)429
 Dirac, P. 狄拉克, (中册)119
 Doppler, C. 多普勒, (中册)47
 Downes, D. 多恩斯, (中册)325
 Dreyer, J. L. E. 德雷耶, (中册)195
 Duncan, J. C. 邓肯, (中册)110, 338

E

Eddington, A. S. 爱丁顿, (上册)39, 229, 406, (中册)44, 83, 90, 119, 258, 424
 Eddy, J. A. 埃迪, (上册)411
 Edlen, B. 埃德伦, (上册)439
 Eginitis 厄吉尼提斯, (下册)284
 Einstein, A. 爱因斯坦, (上册)6, 79, 229, 341, 406, 489, (中册)42, 123, 140, 142, 180, 422—424, 427
 Encke, J. F. 恩克, (上册)358, 368, 369

Engels, F. 恩格斯, (上册)264
Eratosthenes 埃拉托斯特尼, (上册)32, 166
Eudoxus 欧多克斯, (上册)32
Euler, L. 欧拉, (上册)36, 358; (下册)113, 243, 294
Evershed, J. 埃弗谢德, (上册)455

F

Fabricius, D. 法布里休斯, (中册)54
Fermi, E. 费米, (中册)119
Flamsteed, J. 弗兰斯提德, (上册)504
Fleming, S. 弗莱明, (上册)86
Forbush, S. E. 福布希, (上册)484
Foucault, J. B. L. 傅科, (上册)184
Fowler, R. H. 福勒, (中册)119
Fowler, W. A. 福勒, (中册)269
Fraunhofer, J. 夫琅和费, (上册)37, 424

G

Galileo, G. 伽利略, (上册)3, 4, 34, 35, 80, 118, 209, 212, 265, 270, 282, 288; (中册)275; (下册)147, 148
Galle, J. G. 伽勒, (上册)330, 346, 489
Gamow, G. 伽莫夫, (中册)425
Gauss, C. F. 高斯, (下册)144, 183, 184
Gerstenkorn, H. 格斯滕孔, (上册)248
Gibbs 吉布斯, (下册)183
Gill, D. 吉尔, (上册)346
Gold, T. 戈尔德, (中册)427
Goldschmidt, V. M. 戈尔德施米特, (中册)269
Goodricke, J. 古德里克, (中册)55, 79, 172
Gould, B. A. 古德, (中册)323
Graham, A. 格拉汉姆, (上册)338

Greenstein, J. L. 格林斯坦, (中册)406
Gregory 格里果里九世, (上册)262
Gregory, R. 格里果里十三世, (上册)101
Gylden, H. 吉尔当, (下册)6

H

Hackman, R. J. 哈克曼, (上册)251
Hale, G. E. 海耳, (上册)429
Hall, A. 霍尔, (上册)311;
Hall, J. S. 霍尔, (中册)240
Halley, E. 哈雷, (上册)35, 36, 272, 356, 358, 408, 488; (中册)283
Harding, K. 哈丁, (上册)338
Haro, G. 阿罗, (中册)244, 246, 388
Hartmann, J. 哈特曼, (中册)229
Hawking, S. 霍金, (中册)144, 145
Hayashi, C. 林忠四郎, (上册)398
Heisenberg, W. 海森伯, (中册)120
Hencke, K. L. 亨克, (上册)338
Henderson, T. 亨德森, (上册)37, 265, 489; (中册)4, 5
Heracleides 赫拉克利德, (上册)32
Herbig, G. H. 赫比格, (中册)244, 246
Herman, R. 赫尔曼, (中册)425, 427
Herschel, F. W. 威廉·赫歇耳, (上册)36, 38, 148, 254, 279, 327, 337,
480, 484, 488; (中册)148, 214, 215, 275, 279, 289, 334, 335
Herschel, J. F. 约翰·赫歇耳, (上册)49; (中册)55, 195, 275
Hertzprung, E. 赫茨普龙, (上册)489; (中册)35, 62, 81, 265
Hewish, A. 休伊什, (上册)490; (中册)126—128, 140
Hill, G. W. 希尔, (下册)234
Hiltner, W. A. 希尔特纳, (中册)240
Hind, J. R. 欣德, (上册)338
Hipparchus 喜帕恰斯, (上册)32, 43, 191, 228, 259; (中册)8; (下册)35
Hoffman, W. F. 霍夫曼, (中册)329

Høeg, E. 霍格, (下册)77
 Holmberg, E. 霍尔姆堡, (中册)356
 Hoyle, F. 霍伊尔, (上册)398; (中册)269, 427
 Huang, S. S. 黄授书, (上册)149, 490; (中册)74; (下册)291
 Hubble, E. P. 哈勃, (上册)27, 40, 489; (中册)110, 338, 339, 346, 350, 351, 383
 Huggins, W. 哈根斯, (中册)220, 223, 335
 Humason, M. L. 哈马逊, (中册)350, 351
 Humboldt, F. W. 洪保德, (中册)334
 Huygens, C. 惠更斯, (上册)80, 332, 488; (中册)148; (下册)148

I

Ikeya 池谷, (上册)372

J

Jacobi, K. G. J. 雅可比, (下册)228
 Jansky, K. G. 央斯基, (上册)136, 137, 489; (中册)325
 Jeans, J. H. 金斯, (中册)250, 251
 Jeffers, H. M. 杰弗斯, (中册)148
 Jenkins, L. F. 詹金斯, (下册)100
 Johnson, H. L. 约翰逊, (中册)12
 Joy, A. H. 乔伊, (中册)59
 Julius Caesar 儒略·凯撒, (上册)100, 101

K

Kant, I. 康德, (上册)7, 36, 78, 79, 247, 398, 488; (中册)275, 334
 Kapteyn, J. C. 卡普坦, (中册)200, 275, 276
 Keenan, P. C. 基南, (中册)36
 Kepler, J. 开普勒, (上册)35, 49, 158, 265, 279, 282, 284, 285, 337, 341, 346, 488; (中册)103; (下册)147

Kerr, R. P. 克尔, (中册)143
 Kinoshita, H. 木下宙, (下册)39
 Kirchhoff, G. R. 基尔霍夫, (上册)37, 423
 Kleinmann, D. E. 克莱曼, (中册)249
 Kohoutek, L. 科胡特克, (上册)372
 Kopal, Z. 科帕尔, (中册)164, 166
 Kowal, C. T. 柯瓦尔, (上册)351
 Kraft, R. F. 克拉夫特, (中册)96, 97
 Kuiper, G. P. 柯伊伯, (上册)401, 402

L

La Caille, N. L. 拉卡伊, (上册)194
 Labeyrie, A. 拉贝里, (中册)15
 Lagrange, J.-L. 拉格朗日, (上册)402; (下册)233, 243, 249, 284
 Lalande, J.-J. 勒朗德, (上册)194
 Lampland, C. D. 兰普兰特, (中册)110
 Laplace, P.-S. 拉普拉斯, (上册)36, 398, 488, (中册)140; (下册)278, 284
 Leavitt, H. S. 勒维特, (上册)489; (中册)81, 276
 Leighton, R. B. 莱顿, (上册)411, 427
 Lemaître, A. G. 勒梅特, (中册)425
 Le Verrier, U. 勒威耶, (上册)37, 265, 330, 346, 489; (下册)284
 Lin, C. C. 林家翘, (中册)321, 322
 Lindblad, B. 林德布拉德, (中册)296, 312, 320, 321
 Low, F. J. 洛, (中册)249, 329
 Lowell, P. 洛韦尔, (上册)311
 Luyten, W. J. 雷登, (中册)62
 Lyot, B. F. 李奥, (上册)429
 Lyttleton, R. A. 里特顿, (上册)247

M

Mac Donald, G. J. F. 麦克唐纳, (上册)249

Magellan, F. 麦哲伦, (中册)365
 Marx, K. 马克思, (上册)30, 78
 Matthews, T. 马修斯, (中册)405
 Maunder, E. W. 蒙德, (上册)411, 447
 Maxwell, J. 麦克斯韦, (上册)322
 Mayall, N. U. 梅奥尔, (中册)317
 Méchain, P. 梅襄, (中册)195
 Meffroy, J. 美伏罗瓦, (下册)284
 Merton, G. A. 梅尔顿, (下册)183
 Message, P. J. 梅塞奇, (下册)285
 Messier, C. 梅西耶, (中册)110, 195, 334
 Michelson, A. A. 迈克耳孙, (中册)14
 Mils, B. Y. 米尔斯, (上册)144
 Minnet, H. C. 明内特, (中册)325
 Mohammed 穆罕默德, (上册)104
 Mohorovičić 莫霍洛维奇契, (上册)173
 Montanari, G. 蒙塔纳里, (中册)55
 Moore, P. 穆尔, (上册)263, 425
 Morgan, W. W. 摩根, (中册)12, 36, 208, 317, 388

N

Neugebauer, G. 诺伊吉保尔, (中册)250, 329
 Newcomb, S. 纽康, (上册)84, 237, (下册)101, 123
 Newton, I. 牛顿, (上册)6, 11, 18, 35, 79, 166, 209, 265, 282, 283,
 285, 340, 423, 488; (中册)140, 243, 244, 250, 421, 422; (下册)148

O

Olbers, H. W. M. 奥伯斯, (上册)338, 401; (中册)421
 Oort, J. H. 奥尔特, (上册)403; (下册)297, 301
 Oppenheimer, J. R. 奥本海默, (中册)124

Oppolzer, T. 奥波耳彻尔, (下册)183

Orowan, E. 奥罗万, (上册)250

P

Peebles, P. J. E. 皮布尔斯, (中册)429

Penzias, A. 彭齐亚斯, (上册)490; (中册)428, 430, 432

Philolaus 菲洛劳斯, (上册)262

Piazzi, G. 皮亚齐, (上册)279, 488; (下册)183

Piddington, J. H. 皮丁顿, (中册)325

Planck, M. 普朗克, (中册)433

Plato 柏拉图, (上册)32, 78, 262

Pogson, N. R. 普森, (中册)8

Poincaré, J. H. 庞加莱, (下册)211

Posidonius 波西东尼乌斯, (下册)2

Ptolemy, C. 托勒玫, (上册)32, 48, 259, 260, 261, 262; (中册)283;
(下册)2

Pythagoras 毕达哥拉斯, (上册)32, 166

R

Rayet, G. 拉叶, (中册)66

Reber, G. 雷伯, (上册)137, 143, 489

Riccioli, J. B. 利齐奥里, (中册)148

Ringwood, A. E. 灵伍德, (上册)250

Ritchey, G. W. 里奇, (中册)337

Roche, E. 洛希, (中册)165

Rømer, O. 罗默, (上册)163, 321, 488; (下册)77

Rood, H. J. 鲁德, (中册)373

Rosse, W. P. 罗斯, (上册)38; (中册)110, 335

Rosseland, S. 罗斯兰, (中册)219

Russell, C. T. 罗素, (上册)295

Russell, H. N. 罗素, (上册)489; (中册)35, 257
Ryle, M. 赖尔, (上册)146

S

Saha, M. N. 萨哈, (中册)31
Sandage, A. 桑德奇, (中册)405, 411
Sanduleak, N. 桑杜利克, (中册)188
Sastry, G. N. 萨斯特里, (中册)373
Schiaparelli, G. V. 斯基帕雷利, (上册)308
Schlesinger, F. 施莱辛格, (中册)52
Schmidt, B. V. 贝·施米特, (上册)489
Schmidt, M. 玛·施米特, (上册)490; (中册)406
Schwarzschild, K. 史瓦西, (中册)141, 293
Secchi, A. 塞奇, (中册)71
Seeliger, H. 西利格, (中册)280
Seki 关, (上册)372
Seyfert, C. K. 赛弗特, (中册)388
Shapley, H. 沙普利, (上册)489; (中册)79, 210, 276, 336—338
Shoemaker, E. M. 舍马克, (上册)251
Shu, F. H. 徐遐生, (中册)321
Singer, S. F. 辛格, (上册)249
Slipher, V. M. 斯里弗, (中册)223, 350, 424
Spöerer, G. 斯玻勒, (上册)447
Stephenson, C. B. 斯蒂芬森, (中册)188
Stockton, A. 斯托克顿, (中册)417
Strömberg, G. 斯特隆堡, (中册)295
Strömgren, B. 斯特龙根, (中册)233
Strömgren, E. 斯特龙根, (中册)13
Struve, O. 奥托·斯特鲁维, (中册)51, 74
Stumpff, K. K. 斯坦普夫, (上册)295
Swedenberg, E. 斯维登堡, (中册)275, 334

T

- Talcott, A. 太尔各特, (下册)109
Tisserand, F. F. 蒂塞朗, (下册)284
Titius, J. D. 提丢斯, (上册)36, 279, 488
Tombaugh, C. W. 汤博, (上册)332, 489
Trumpler, R. J. 特朗普勒, (中册)202, 229

U

- Urey, H. C. 尤里, (上册)249

V

- Van Allen, J. A. 范爱伦, (上册)182
Van de Hulst, H. C. 范德胡斯特, (中册)231, 232
Van den Bergh, S. 范登贝尔格, (中册)205
Vaucouleurs, G. 沃库勒, (中册)324, 382, 428
Vogt, H. 沃格特, (中册)257
Volkoff, G. M. 沃尔科夫, (中册)124

W

- Wahr, J. 瓦尔, (下册)39
Walker, M. F. 沃尔克, (中册)96
Walsh, D. 沃尔什, (中册)416
Wegener, A. 韦格纳, (上册)173
Weizsäcker, C. F. F. 魏茨泽克, (上册)413, 489
Weymann, R. J. 韦曼, (中册)416
Whipple, F. L. 惠普尔, (上册)367, 403
Wilson, R. W. 威尔逊, (上册)490, (中册)428, 430, 432
Wise, D. U. 怀斯, (上册)247
Wolf, C. J. E. 沃尔夫, (中册)66

Wolf, R. 罗·沃尔夫, (上册)451, 452, 484
Woulard, E. W. 伍拉德, (下册)39
Wright, T. 赖特, (上册)488; (中册)275, 334
Wylie, A. 伟烈亚力, (上册)49

Z

Zeemann, P. 塞曼, (上册)456
Zwicky, F. 兹威基, (中册)124, 372, 373, 383, 388, 401
Амбарцумян, В. А. 阿姆巴楚米扬, (中册)178, 204—206
Белопольский, А. А. 贝洛波尔斯基, (中册)79, 172
Всехсвятский, С. К. 弗谢赫斯维亚茨基, (上册)403
Ковальский, М. А. 科瓦列斯基, (中册)438
Козлов, В. В. 科兹洛夫, (上册)253
Костинский 科斯京斯基, (下册)114
Кукаркин, Б. В. 库卡尔金, (中册)312
Ландау, Л. Д. 朗道, (上册)489, 490; (中册)121, 124
Ломоносов, М. В. 罗蒙诺索夫, (上册)36, 272, 294
Маркарян, Б. Е. 马卡良, (中册)387, 388
Паренаго, П. П. 帕连纳戈, (中册)312
Сафронов, В. С. 萨夫龙诺夫, (上册)398
Струве, В. Я. 瓦·雅·斯特鲁维, (上册)37, 265, 489; (中册)4, 5, 148
Струве, Л. О. 勒·奥·斯特鲁维, (中册)295
Струве, О. В. 奥·瓦·斯特鲁维, (中册)148
Тихов, Г. А. 季霍夫, (上册)311
Фридман, А. 弗里德曼, (中册)424
Шани, Г. А. 沙冈, (中册)51
Щмидт, О. Ю. 奥·尤·施米特, (上册)249

名 词 索 引

为方便读者,本书编纂了名词索引。除了通常的编排原则,本索引还需说明:

(1) 所有名词都只给出一、二处最重要的出现处的页码,或者是对它们下定义处,或者那儿有重要的阐发。

(2) 凡已在本书章节标题上出现之名词(如“太阳”、“地球”等)读者查目录已一目了然,故不再列入本索引。

一 画

一阶摄动, (下册)272

二 画

二阶摄动, (下册)272

人卫照相机, (下册)87

人马A, (中册)325

人造卫星激光测距, (下册)126

人造卫星激光测距仪, (下册)130

人造地球卫星运动理论, (下册)285

几何延迟时间, (下册)126

力学视差, (中册)164

三 画

三合星, (中册)147

三角视差, (中册)4

三角视差法, (上册)191

三统历周期, (上册)237

干支, (上册)105

下合, (上册)267

下弦, (上册)202

大犬 β 型星, (中册)87

大中星仪, (下册)75

大气反常折射, (上册)159; (下册)6

大气色散, (上册)113

大气折射, (上册)115; (下册)7

大气折射订正表, (下册)7

大气折射常数, (下册)5

大气食, (中册)175

大气消光, (上册)113

大气窗口, (上册)112

大地水准面, (上册)167

大地纬度, (上册)171

大红斑, (上册)313

大麦哲伦云, (中册)365

大序, (中册)79

大陆漂移, (上册)173
 大统一时期, (中册)434
 大陵五, (中册)171
 大陵伴谬, (中册)266
 大陵型食双星, (中册)172
 大熊星团, (中册)200
 大熊 W, (中册)174
 大熊 W 型食双星, (中册)174
 大熊 ζ , (中册)177
 大爆炸宇宙论, (中册)425
 万有引力常数, (上册)285; (下册)152
 上弦, (上册)201
 上合, (上册)267
 广义相对论, (中册)140
 广角天体照相机, (下册)87
 弓形激波, (中册)168
 小行星卫星, (上册)353
 小麦哲伦云, (中册)365
 马卡良星系, (中册)387
 马卡良 205, (中册)411
 子午环, (上册)160; (下册)72
 子午观测, (下册)71
 子午线方向, (下册)132
 孖星, (中册)147

四 画

比邻星, (中册)5
 比拉彗星, (上册)369
 比较星, (下册)92
 切向速度, (中册)284
 无线电时号, (下册)83
 天王星, (上册)327

天文三角形, (上册)69; (下册)132
 天文动力学, (上册)12
 天文地球动力学, (上册)10
 天文导航, (下册)140
 天文纬度, (上册)171
 天文单位, (上册)407
 天文学三大验证, (上册)6
 天文参考系, (下册)95
 天文测时, (下册)117
 天文经纬仪, (下册)133
 天文符号, (上册)28
 天文摆钟, (下册)119
 天平动, (上册)206
 天体, (上册)1
 天体力学, (上册)10
 天体力学分析方法, (下册)263
 天体力学定性方法, (下册)264
 天体力学数值方法, (下册)263
 天体物理学, (上册)12
 天体测量学, (上册)9
 天体测量双星, (中册)150
 天体照相机, (下册)86
 天体演化学, (上册)14
 天顶仪, (上册)162; (下册)110
 天顶点, (下册)134
 天底点, (下册)75
 天线温度, (中册)325
 天狼 A, (中册)116
 天狼 B, (中册)116
 天球仪, (上册)52
 天象仪, (上册)52
 天琴 RR 空区, (中册)212

天琴 RR 型星, (中册)85
 天琴 β , (中册)172
 天鹅座 θ , (中册)104
 天鹅 A, (中册)391
 天鹅 P, (中册)69
 天鹅 P 型星, (中册)70
 天鹅 P 型谱线轮廓, (中册)70
 天鹅 X-1, (中册)181
 天鹅 31, (中册)175
 天鹅 32, (中册)175
 天鹅 61, (中册)4
 天蝎-半人马星团, (中册)200
 夫琅和费光谱, (上册)423
 开阳, (中册)177
 开普勒运动, (上册)258
 不规则卫星, (上册)282
 不规则变星, (中册)88
 不规则星系, (中册)346
 不变平面, (上册)277
 不相接双星, (中册)166
 不透明度, (中册)42
 木卫现象, (上册)319
 木星能源, (上册)316
 五分钟振荡, (上册)411
 丰度, (中册)34
 太尔各特水准器, (下册)112
 太尔各特星对, (下册)109
 太阳大气, (上册)417
 太阳历, (上册)100
 太阳风, (上册)443
 太阳平黄经, (下册)123
 太阳系的稳定性问题, (下册)284

太阳视差, (上册)407; (下册)101
 太阳活动, (上册)410
 太阳射电爆发, (上册)477
 太阳常数, (上册)422
 太阴历, (上册)99
 历元, (上册)103; (下册)1
 历书天文学, (上册)11
 历书时, (上册)87
 区时, (上册)86
 巨行星, (上册)292
 巨星, (中册)35
 巨星系, (中册)356
 巨洞, (中册)383
 中天, (上册)75
 中天法测时, (下册)117
 中介次系, (中册)313
 中介星族 I, (中册)310
 中介星族 II, (中册)312
 中间层, (上册)178
 中性层, (上册)179
 中星仪, (上册)163
 中微子失踪之谜, (上册)415
 内因变星, (中册)57
 内拉格朗日点, (中册)165
 贝塞耳日数, (下册)27, 57
 贝塞耳(假)年, (下册)47
 日心坐标, (下册)11
 日心体系, (上册)261
 日全食, (上册)231
 日全环食, (上册)232
 日环食, (上册)232
 日界线, (上册)91

日冕凝聚区, (上册)441
 气体彗尾, (上册)362
 分光双星, (中册)150
 分光视差, (中册)7
 分点月, (上册)204
 牛顿方程, (下册)255
 牛顿时, (上册)88
 长周期变星, (中册)88
 长期光行差, (下册)30
 长期视差, (下册)20
 长期摄动, (下册)283
 长焦距天体照相机, (下册)87
 反射星云, (中册)223
 反射望远镜, (上册)120
 反常折射, (下册)6
 反常彗尾, (上册)362
 反照率, (上册)294
 月谷, (上册)218
 月陆, (上册)216
 月相, (上册)201
 月面暂现现象, (上册)253
 月海, (上册)214
 月球激光测距, (下册)126
 月掩星, (中册)15
 月龄, (上册)202
 六分仪, (下册)141
 方位天文学, (上册)10
 方位差, (下册)77
 方照, (上册)272
 火星生命, (上册)311
 火星运河, (上册)309
 双子U型星, (中册)100

双子 α , (中册)177
 双切轨道, (下册)193
 双重星系, (中册)354
 双类星体, (中册)416
 双谱分光双星(双线分光双星)
 (中册)151
 引力半径, (中册)141
 引力收缩, (中册)253
 引力红移, (中册)123
 引力透镜效应, (中册)417
 引力常数, (下册)104
 巴耳末系, (中册)22
 巴耳末跃变, (中册)28
 巴纳德星, (中册)285
 水内行星, (上册)258
 水平支, (中册)212
 水平差, (下册)77
 水平轴, (下册)72
 水平度盘, (下册)134

五 画

节气, (上册)107
 平天极, (下册)31
 平太阳, (上册)84
 平太阳时, (上册)84
 平均大气折射表, (下册)7
 平均极, (下册)114
 平均纬度, (下册)114
 平均视差, (中册)294
 平赤道, (下册)31
 平位置, (下册)45
 平面圆型限制性三体问题, (下册)224

平春分点, (下册)31
 平恒星日, (下册)43
 平恒星时, (下册)43
 平流层, (上册)178
 正常重力, (上册)170
 正常旋涡星系, (中册)341
 古登堡间断面, (上册)175
 古德带, (中册)323
 本地静止标准, (中册)292
 本动, (中册)289
 本星团, (中册)323
 本超星系团, (中册)382
 本影, (上册)230, 445
 本影闪耀, (上册)446
 本影点, (上册)446
 世界时, (上册)86
 东大距, (上册)267
 布喇开系, (中册)22
 石英钟, (下册)119
 石陨星, (上册)383
 石铁陨星(陨铁石), (上册)383
 北极星, (上册)72
 北极星高度和方位角表, (下册)140
 北河二, (中册)177
 北银极, (中册)277
 北冕R型星, (中册)101
 目视双星, (中册)149
 目视星等, (中册)9
 目镜测微器, (下册)74
 电子照相机, (上册)155
 电荷耦合器, (上册)156
 电离, (中册)19

电离电势, (中册)19
 电离层, (上册)179
 四边形聚星, (中册)178
 四合星, (中册)147
 史瓦西半径, (中册)141
 史瓦西黑洞, (中册)142
 仙女星系, (中册)369
 仙王VV, (中册)176
 仙王 β 型星, (中册)87
 仙王 δ , (中册)79
 仙后A, (中册)105
 外因变星, (中册)57
 生长曲线, (中册)34
 白光耀斑, (上册)467
 白斑, (上册)321
 白道, (上册)199
 包层, (中册)258
 汇聚点, (中册)198
 主序, (中册)35
 主序星, (中册)35
 主序前星, (中册)255
 主环带, (上册)344
 主星, (中册)147
 主章动项, (下册)31
 宁静日珥, (上册)460
 半人马星系团, (中册)376
 半人马X-3, (中册)181
 半人马 α , (中册)5
 半人马 ω , (中册)208
 半规则变星, (中册)87
 半相接双星, (中册)166
 半影, (上册)231, 445

半影月食, (上册)233
闪光光谱, (上册)429
对日照, (上册)396
对流层, (上册)177
弗里德曼宇宙模型, (中册)424
发射星云, (中册)220

六 画

协调世界时, (上册)89
地心体系, (上册)259
地心坐标, (下册)11
地心纬度, (上册)171
地平坐标系, (上册)63
地平视差, (上册)192
地壳, (上册)172
地极坐标, (下册)114
地极受迫摆动, (下册)113
地核, (上册)175
地球力学时, (下册)124
地球弓形激波, (上册)181
地球自转参数, (下册)125
地球赤道半径, (上册)167
地球扁率, (上册)167
地理纬度, (上册)171
地冕, (上册)178
地磁要素, (上册)180
地幔, (上册)175
场星系, (中册)372
吉林陨石雨, (上册)390
西大距, (上册)267
西利格定理, (中册)279
亚巨星, (中册)37

亚巨星支, (中册)211
亚矮星, (中册)37
亚稳态, (中册)219
再发新星, (中册)98
共生星, (中册)99
共同形成说, (上册)249
共振效应, (上册)301
有效温度, (中册)23
扣克伍德空隙, (上册)344
轨道共振, (上册)344
轨道要素(轨道根数), (上册)275
毕星团, (中册)199
光子计数照相机, (上册)156
光电中星仪, (下册)119
光电星等, (中册)9
光电倍增管, (上册)155
光电等高仪, (下册)145
光行差常数, (下册)23
光行差椭圆, (下册)24
光年, (中册)3
光层, (中册)143
光环, (上册)322
光变曲线, (中册)57
光学双星, (中册)148
光度, (中册)7
光度级, (中册)36, 348
光度函数, (中册)313
光速圆柱, (中册)137
光谱双星, (中册)151
光谱变星, (中册)54
光谱型, (中册)24
吸积, (中册)167

吸积柱, (中册)187
 吸积盘, (中册)168, 186
 岁差章动基本方程, (下册)304
 早型星, (中册)25
 同步加速辐射, (中册)111
 同步自转, (上册)205
 同温层, (上册)178
 回归年, (上册)97
 回旋辐射, (中册)188
 年首, (下册)47
 年首平位置, (下册)46
 年首平坐标, (下册)46
 仿视星等, (中册)9
 延伸大气, (中册)65
 自由-自由跃迁, (中册)20
 自由-束缚跃迁, (中册)20
 自由摆动, (下册)113
 自行, (中册)198
 向点, (中册)289; (下册)10, 22
 行星气象学, (上册)2
 行星际气体, (上册)394
 行星际尘埃, (上册)393
 行星状星云, (中册)215
 行星族彗星, (上册)359
 后发星团, (中册)199
 后发星系团, (中册)375
 全波天文学, (上册)110
 会合运动方程式, (上册)204
 会合周期, (上册)273
 多色测光系统, (中册)12
 多重星系, (中册)361
 多普勒效应, (中册)47

多镜面望远镜, (上册)126
 色余, (中册)240
 色指数, (中册)12
 色球网络, (上册)434
 色温度, (中册)12
 交点月, (上册)204
 交食, (上册)226
 灯塔效应, (中册)135
 冲日, (上册)273
 冲浪, (上册)434
 池谷-关彗星, (上册)372
 宇宙年, (中册)302
 宇宙岛, (中册)334
 宇宙学红移, (中册)409
 宇宙学原理, (中册)423
 宇宙线, (上册)116; (中册)242
 宇宙背景辐射, (中册)430
 米尔斯十字, (上册)114
 米粒组织, (上册)426
 导出常数, (下册)102
 导星镜, (下册)86
 阴阳历, (上册)102
 红巨星支, (中册)212
 红半规则变星, (中册)87
 红变星, (中册)87
 红移, (中册)47, 350
 级联跃迁, (中册)219

七 画

形心, (中册)291
 形心行星, (上册)292
 远日点, (上册)183

远星点, (中册)74
坍缩, (中册)40, 114
均质层, (上册)178
极羽, (上册)442
极限星等, (上册)130
极移快速服务, (下册)116
极端星族I, (中册)310
极端星族II, (中册)312
克尔黑洞, (中册)143
克罗以茨群隕星, (上册)360
苏黎世分类法, (上册)450
赤道日月岁差, (下册)33
赤道系统误差, (下册)97
赤经日月岁差, (下册)33
赤经行星岁差, (下册)33
赤经系统误差, (下册)97
赤经总岁差, (下册)35
赤道式装置, (上册)128
赤道地平视差, (下册)12
赤道坐标系, (上册)66
赤道点, (下册)84
束缚-自由跃迁, (中册)20
束缚-束缚跃迁, (中册)19
还原大气, (上册)179
折反射望远镜, (上册)124
折射望远镜, (上册)118
时角坐标系, (上册)65
针状物, (上册)433
低速星, (中册)295, 306
位置线, (下册)141
伴星, (中册)147
伽利略卫星, (上册)319

近日点, (上册)183
近地小行星, (上册)348
近星点, (中册)74
近点月, (上册)204
近点年, (上册)183
坐标量度仪, (下册)87
角反射器, (下册)128
快新星, (中册)93
闰日, (上册)99
闰月, (上册)102
闰年, (上册)100
闰秒(跳秒), (上册)90
沙罗周期, (上册)237
沃尔夫-拉叶星, (中册)66
沃尔夫相对数, (上册)451
沃尔夫数, (上册)451
沃格特-罗素定理, (中册)257
完全宇宙学原理, (中册)427
灾变变星, (中册)102
灾变说, (上册)397
初始主序, (中册)255
初始星表, (下册)96
阿尔文面, (中册)187
纬天平动, (上册)207
纵向塞曼效应, (中册)76
纽康周期, (上册)237

八 画

环形山, (上册)212
现代星云说, (上册)398
规则卫星, (上册)281
武仙AM, (中册)183

武仙X-1, (中册)182
 板块运动, (上册)174
 耶鲁星表, (下册)99
 英仙双星团, (中册)197
 英仙星团, (中册)199
 英仙星系团, (中册)376
 英仙 β , (中册)171
 范爱伦带, (上册)182
 抽运, (中册)238
 拉格朗日平动点, (上册)351
 拉格朗日括号, (下册)247
 欧拉动力学方程, (下册)296
 欧拉角, (下册)293
 欧拉周期, (下册)299
 势函数, (下册)199
 非引力效应, (上册)364
 非均质层, (上册)178
 帕邢系, (中册)22
 帕洛玛天图, (中册)372
 罗斯兰循环 (中册)218
 国际大地测量与地球物理联合会,
 (下册)125
 国际天文学联合会, (下册)98
 国际地球自转服务, (下册)126
 国际极移服务, (下册)115
 国际时间局, (下册)115
 国际纬度服务, (下册)115
 国际纬度站, (下册)115
 国际原子时, (下册)124
 量交流, (中册)166
 物理天平动, (上册)209
 物理双星, (中册)148

物端棱镜, (上册)135
 垂直环, (下册)75
 垂直度盘, (下册)134
 垂线偏差, (上册)171
 垂线偏离, (上册)189
 依巴谷天体测量卫星, (下册)107
 质心力学时, (下册)124
 质光比, (中册)357
 质光关系, (中册)38
 质量函数, (中册)162
 质量瘤, (上册)224
 贫金属星, (中册)310
 贫星系团, (中册)371
 金牛RV型星, (中册)87
 金牛T型星, (中册)59
 金斯不稳定性, (中册)250
 周日天平动, (上册)208
 周日平行圈, (上册)71
 周日光行差, (下册)27
 周日视差, (下册)11
 周年光行差, (下册)23
 周年视差, (中册)2, (下册)16
 周光关系, (中册)81
 周期流星, (上册)375
 周期摄动, (下册)283
 底片比例尺, (上册)138, (下册)87
 底片常数, (下册)90
 泡利不相容原理, (中册)119
 波得定则, (上册)279
 单谱分光双星(单线分光双星),
 (中册)151
 定义常数, (下册)102

定标星, (下册)84
 实用天文学, (上册)10
 空间天文学, (上册)14
 空间天体测量学, (下册)106
 空间望远镜, (下册)108
 视天顶距, (下册)3
 视轨道, (中册)156
 视自转速度, (中册)51
 视向速度, (中册)48, 284
 视向速度曲线, (中册)153
 视星等, (中册)8
 视界, (中册)141
 视亮度, (中册)7
 视差动, (中册)289; (下册)20
 视差位移, (下册)10
 视差星, (下册)94
 视椭圆, (中册)156
 视超光速运动, (中册)419
 弥漫星云, (中册)214
 参考椭球面, (上册)167
 经天平动, (上册)206
 经典造父变星, (中册)79

九 画

玻璃陨石, (上册)387
 春分点, (上册)55
 标准向点, (中册)292
 标准宇宙模型, (中册)432
 柯瓦尔天体, (上册)351
 相对口径, (上册)130
 相对轨道, (中册)156
 相对自行, (下册)93

相对论天体物理学, (中册)143
 相对论宇宙论, (中册)424
 相对视差, (下册)95
 相对星表, (下册)96
 相接双星, (中册)166
 柱一, (中册)176
 柱二, (中册)176
 南门二, (中册)4
 南银极, (中册)277
 荧光过程, (中册)218
 甚长基线干涉仪, (上册)146
 轴颈, (下册)73
 轻子时期, (中册)434
 背点, (中册)289
 临边昏暗, (上册)420
 临界自转速度, (中册)73
 临界等势面, (中册)165
 哈勃分类, (中册)339
 哈勃年龄, (中册)426
 哈勃定律, (中册)350
 哈勃效应, (中册)383
 哈勃常数, (中册)350
 哈雷彗星, (上册)365
 星下点, (下册)141
 星子, (上册)399
 星云变星, (中册)59
 星云说, (上册)397
 星风, (中册)68, 167
 星对赤纬, (下册)110
 星团变星, (中册)85
 星系核, (中册)359
 星系群, (中册)361

星际分子, (中册)234
 星际有机分子, (上册)4
 星际尘埃, (中册)239
 星际吸收线, (中册)230
 星际红化, (中册)239
 星际原子, (中册)229
 星际消光, (中册)239
 星际微波激射源, (中册)238
 星表历元平位置, (下册)46
 星座, (上册)24
 星冕, (中册)23
 星族 I, (中册)309
 星族 I 造父变星, (中册)85
 星族 II, (中册)309
 星族 II 造父变星, (中册)85
 星链, (中册)205
 星等, (中册)8
 星群视差, (中册)200
 星震, (中册)139
 昴星团, (中册)197
 秒差距, (中册)3
 科胡特克彗星, (上册)371
 钟差, (下册)72
 钟速, (下册)139
 复合, (中册)20
 复合荧光过程, (中册)219
 氢原子钟, (下册)119
 重力异常, (上册)170
 重磁旋体, (中册)415
 俘获说, (上册)248
 顺行, (上册)266
 鬼星团, (中册)197

盾牌 δ 型星, (中册)86
 食分, (上册)236
 食双星, (中册)151
 食季, (上册)243
 食限, (上册)242
 独立日数, (下册)27, 58
 逃逸速度, (上册)287
 亮星云, (中册)214
 恒星三角视差总表, (下册)100
 恒星大气, (中册)23
 恒星月, (上册)98
 恒星年, (上册)97
 恒星时, (上册)92
 恒星位置的绝对测定, (下册)82
 恒星位置的相对测定, (下册)84
 恒星物理学, (上册)13
 恒星视向速度总表, (下册)100
 恒星摄谱仪, (上册)134
 测不准关系, (中册)120
 测光双星, (中册)153
 测光轨道要素, (中册)160
 测光轨道解, (中册)160
 测站位移, (上册)189
 测微光度计, (中册)29
 测微器周值, (下册)112
 活力公式, (上册)286
 活动日珥, (上册)460
 洋底扩张, (上册)173
 洛希极限, (上册)290
 洛希瓣, (中册)165
 浑天说, (上册)44
 前景星系, (中册)417

总星系, (上册)28
 宣夜说, (上册)44
 室女星系团, (中册)374
 室女W型星, (中册)84
 客星, (中册)91
 类地行星, (上册)292
 类星射电源, (中册)407
 类新星变星, (中册)99
 逆 β 衰变, (中册)123
 扁平次系, (中册)312
 退行速度, (中册)351
 退耦时期, (中册)426
 陨冰, (上册)388
 绝对目视星等, (中册)12
 绝对光电星等, (中册)12
 绝对仿视星等, (中册)12
 绝对自行, (下册)94
 绝对星表, (下册)96
 绝对星等, (中册)11
 绝对热星等, (中册)12
 绝对辐射星等, (中册)12
 绝对照相星等, (中册)12

十 画

格里历, (上册)101
 格林尼治平太阳时, (下册)121
 格林尼治恒星时, (下册)139
 核合成, (中册)268
 核形成时期, (中册)434
 真天极, (下册)31
 真天顶距, (下册)3
 真太阳时, (上册)83

真赤道, (下册)31
 真位置, (下册)46
 真恒星日, (下册)43
 真恒星时, (下册)43
 莫霍间断面, (上册)173
 速逃星, (中册)208
 速度弥散度, (中册)293
 速度椭球, (中册)292
 原子时, (上册)89; (下册)120
 原子钟, (上册)89; (下册)119
 原始大气, (上册)179
 原恒星, (中册)252
 较老星族I, (中册)310
 致密星系, (中册)388
 致密X射线源, (中册)180
 热平衡, (中册)44
 热层, (上册)178
 热改正, (中册)13
 热星等, (中册)9
 热斑, (中册)169
 晕星族II, (中册)312
 恩克彗星, (上册)368
 圆盘星族, (中册)312
 钱德拉塞卡极限, (中册)121
 钱德勒周期振动, (下册)300
 钱德勒摆动, (下册)113
 铁陨星(陨铁), (上册)383
 氦丰度, (中册)272, 434
 氦闪, (中册)262
 氧化大气, (上册)179
 氦分子钟, (上册)89; (下册)119
 造父一, (中册)79

造父变星, (中册)79
 造父变星不稳定带, (中册)79
 造父视差, (中册)83
 透镜状星系, (中册)345
 射电干涉仪, (上册)143
 射电天文学, (上册)14
 射电天体测量学, (下册)104
 射电双源星系, (中册)392
 射电头尾星系, (中册)394
 射电致密星系, (中册)391
 射电源闪烁, (中册)126
 射电源惯性坐标系, (下册)106
 射电瓣, (中册)391
 臭氧层, (上册)179
 爱因斯坦宇宙模型, (中册)423
 留, (上册)266
 站心坐标, (下册)11
 高速星, (中册)295, 306
 高能天体物理学, (上册)13
 高偏振星, (中册)183
 高斯引力常数, (下册)102
 凌日, (上册)270
 准直差, (下册)78
 海王星, (上册)329
 流体静力学平衡, (中册)40
 流星体, (上册)373
 流星余迹, (上册)373
 朔, (上册)201
 朔望月, (上册)203
 容许跃迁, (中册)218
 冥王星, (上册)332
 能层, (中册)144

通古斯陨星, (上册)389
 通约, (下册)283

十 一 画

球状次系, (中册)313
 球状体, (中册)226
 球面三角形, (上册)57
 球面天文学, (上册)9
 理想坐标, (下册)88
 臂状星云, (中册)61
 黄半规则变星, (中册)87
 黄赤交角章动, (下册)39
 黄经日月岁差, (下册)33
 黄经行星岁差, (下册)34
 黄经岁差, (下册)34
 黄经章动, (下册)39
 黄道光, (上册)395
 黄道坐标系, (上册)67
 基本星, (下册)96
 基本星表, (下册)96
 基尔霍夫定律, (上册)423
 基态, (中册)18
 基线参数, (下册)127
 基础常数, (下册)102
 掠日彗星, (上册)360
 常陈型星, (中册)77
 常数变易法, (下册)243
 晚型星, (中册)25
 距离模数, (中册)11
 冕洞, (上册)440
 冕流, (上册)442
 累积星等, (中册)11

累积脉冲轮廓, (中册)131
 铯原子钟, (上册)89; (下册)119
 银纬, (中册)277
 银河星云, (中册)214
 银经, (中册)277
 银道, (中册)277
 银道坐标系, (中册)277
 银道面, (中册)277
 铷原子钟, (下册)119
 移动星团, (中册)198
 第一宇宙速度, (上册)287; (下册)188
 第二宇宙速度, (上册)287; (下册)188
 第三宇宙速度, (下册)189
 第谷体系, (上册)49
 偶发流星, (上册)374
 偏振度, (中册)113
 船帆AI型星, (中册)86
 船位圆, (下册)141
 盘左观测, (下册)134
 盘右观测, (下册)136
 猎犬 α 型星, (中册)77
 猎户星云, (中册)222
 猎户座四边形, (中册)178
 猎户YY型星, (中册)61
 猎户 θ' , (中册)177
 旋涡星系, (中册)340
 毫秒脉冲星, (中册)129
 章动常数, (下册)38
 章动椭圆, (下册)40
 望, (上册)202
 康德-拉普拉斯学说, (上册)398
 鹿豹Z型星, (中册)100

渐台二, (中册)172
 渐台型食双星, (中册)174
 盖天说, (上册)44
 密度波, (中册)321
 隐带, (中册)361
 维里质量, (中册)381
 维里定理, (中册)379
 综合孔径射电望远镜, (上册)146
 综合星表, (下册)99

十二画

斑点干涉测量, (中册)15
 棒旋星系, (中册)341
 棱镜等高仪, (下册)144
 椭圆星系, (中册)339
 椭球双星, (中册)153
 椭球变星, (中册)153
 联系常数, (下册)92
 散逸层, (上册)178
 斯特龙根半径, (中册)233
 超人差棱镜等高仪, (下册)145
 超巨星, (中册)35
 超巨星系, (中册)356
 超米粒, (上册)427
 超新星遗迹, (中册)104
 裂变, (中册)43
 提丢斯-波得定则, (上册)279
 雅可比坐标系, (下册)217
 雅可比积分, (下册)228
 暂现X射线源, (中册)98
 喷流, (中册)191, 396

喀戎, (上册)352
 量度坐标, (下册)87
 黑子周期, (上册)452
 黑子相对数, (上册)451
 短周期彗星, (上册)359
 短缺质量, (中册)381
 等级式宇宙论, (中册)428
 等值宽度, (中册)31
 等高仪, (上册)160
 氦序, (中册)66
 傅科摆, (上册)184
 奥尔特公式, (中册)298
 奥尔特常数, (中册)301
 奥伯斯佯谬, (中册)422
 御夫RW型星, (中册)62
 御夫 ϵ , (中册)176
 御夫 ζ , (中册)176
 温室效应, (上册)298
 普朗克时期, (中册)433
 富金属星, (中册)310
 富星系团, (中册)371
 强子时期, (中册)434

十 三 画

赖曼系, (中册)20
 蓝移, (中册)47
 蒭萁型星, (中册)88
 蒭萁增二, (中册)88
 蒙气差, (上册)115; (下册)7
 蒙德极小期, (上册)411
 禁戒跃迁, (中册)218
 禁线, (中册)216

零龄主序, (中册)255
 辐射压力, (中册)41
 辐射纹, (上册)217
 辐射带, (上册)182
 辐射星等, (中册)9
 辐射点, (上册)375; (中册)198
 暗条, (上册)462
 暗星云, (中册)224
 蜂巢星团, (中册)197
 照相天顶筒, (上册)162; (下册)113
 照相天图星表, (下册)99
 照相星等, (中册)9
 矮星, (中册)36
 矮星系, (中册)356
 矮造父变星, (中册)85
 锥形激波, (中册)168
 简并电子气, (中册)119
 像增强器(像管), (上册)156
 微波背景辐射, (中册)428
 微波激射, (中册)236
 新星, (中册)91
 满月, (上册)202
 塞曼效应, (上册)456; (中册)75

十 四 画

静界, (中册)144
 赫比格-阿罗天体, (中册)244
 赫氏关系, (中册)81
 赫氏空区, (中册)265
 聚变, (中册)43
 碳序, (中册)66
 碳星, (中册)25

磁层, (上册)181
 磁变星, (中册)54
 磁球, (中册)187
 磁暴, (上册)180
 蜘蛛状星云, (中册)368
 稳恒态宇宙模型, (中册)427
 慢新星, (中册)93
 赛弗特星系, (中册)388
 谱线位移, (中册)48
 谱线轮廓, (中册)31

十五画

蝎虎天体, (中册)400
 蝎虎BL, (中册)400
 暴缩, (中册)114
 德国天文学会星表, (下册)99
 颜色-星等图, (中册)202
 潮汐力, (上册)247
 潮汐分裂说, (上册)247
 潮汐作用, (上册)189, 288
 潮汐摄动, (上册)189
 潮汐摩擦, (上册)188

十六画

镜筒弯曲, (下册)81
 儒略历, (上册)100
 儒略日, (上册)104; (下册)46
 鲸鱼UV型星, (中册)63
 鲸鱼 α , (中册)88
 激发态, (中册)18
 激光卫星, (下册)130

激光地球动力学卫星, (下册)130

十七画

瞬时极, (下册)114
 瞬时根数, (下册)242
 瞬时纬度, (下册)114

十九画

蟹状星云, (中册)109
 爆发日珥, (上册)461
 爆发变星, (中册)58
 爆发星系, (中册)395

B型发射星, (中册)71
 BIH, (下册)115
 BN天体, (中册)250
 BPM, (下册)121
 CCD, (上册)156
 CEI, (下册)105
 E项, (下册)27
 ERP, (下册)125
 ET, (下册)123
 FK3, (下册)98
 FK4, (下册)98
 FK5, (下册)98
 GC, (下册)98
 HD, (下册)100
 HDE, (下册)100
 HI区, (中册)231
 HII区, (中册)231
 IAU, (下册)102

- | | |
|-----------------------------------|----------------------|
| IAU(1964)天文常数系统,(下册)102 | NGC5194, (中册)403 |
| IAU(1976, 1980)天文常数系统,
(下册)102 | NGC5195, (中册)403 |
| IC, (下册)100 | NGC5272, (中册)208 |
| ILS, (下册)115 | NGC6205, (中册)208 |
| IPMS, (下册)115 | OB星协, (中册)205 |
| IUGG, (下册)125 | Of型星, (中册)69 |
| KL源, (中册)250 | R星协, (中册)205 |
| LAGEOS, (下册)130 | SAO星表, (下册)99 |
| LLR, (下册)126 | SLR, (下册)126 |
| M3, (中册)211 | STARLETTE卫星, (下册)130 |
| M13, (中册)208 | T星协, (中册)205 |
| M31, (中册)369 | TAL, (下册)124 |
| M33, (中册)370 | TDB, (下册)124 |
| M51, (中册)403 | TDT, (下册)124 |
| M82, (中册)395 | UT0, (下册)122 |
| M87, (中册)395 | UT1, (下册)122 |
| MERIT计划, (下册)125 | UT2, (下册)122 |
| N型星系, (中册)388 | UTC, (上册)89; (下册)124 |
| N30星表, (下册)98 | VLBI, (下册)105 |
| NFK, (下册)98 | VLBL, (上册)146 |
| NGC, (中册)195; (下册)100 | X射线, (上册)150 |
| NGC224, (中册)369 | X射线脉冲星, (中册)183 |
| NGC598, (中册)370 | X射线脉冲源, (中册)181 |
| NGC1199, (中册)412 | X射线新星, (中册)98 |
| NGC1265, (中册)394 | X射线暴, (中册)213 |
| NGC1275, (中册)397 | γ 射线, (上册)151 |
| NGC3034, (中册)395 | 3C48, (中册)405 |
| NGC3384, (中册)411 | 3C206, (中册)410 |
| NGC4319, (中册)411 | 3C236, (中册)392 |
| NGC4486, (中册)395 | 3C273, (中册)405 |
| NGC5128, (中册)399 | 3α 反应, (中册)44 |
| NGC5139, (中册)208 | 0957+561, (中册)416 |
| | 1968年BIH系统, (下册)116 |